UNIVERSIDAD CATÓLICA DE TRUJILLO BENEDICTO XVI

SEGUNDA ESPECIALIDAD EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Trabajo académico para obtener el Título de
SEGUNDA ESPECIALIDAD EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

AUTOR

Alejandro Torres Lozano

ASESOR

Dr. Julio César Matute Calderón

https://orcid.org/0000-0003-4705-6493

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN

Educación y responsabilidad social

TRUJILLO - PERÚ

2024

DECLARATORIA DE ORIGINALIDAD

Señor(a) Decano(a) de la Facultad de Humanidades:

El suscrito Dr. Julio César Matute Calderón hace de su conocimiento que en condición de asesor del trabajo académico: "Estrategias heurísticas para la resolución de problemas matemáticos en educación secundaria" del autor: Alejandro Torres Lozano, egresado del Programa de Segunda en Problemas en Didáctica de la Matemática para obtener el título de Especialista. Informo a usted, que la investigación fue concluida en su contenido, modo y forma la cual está en condiciones de ser sometido a jurado examinador, la misma que ha seguido rigurosamente los procedimientos emitidos por las unidades. académica y de investigación para los procesos de titulación de la Universidad Católica de Trujillo.

Atentamente.

Dr. Julio César Matute
Calderón Asesor
DNI N° 47454341

AUTORIDADES UNIVERSITARIAS

Exemo Mons. Dr. Héctor Miguel Cabrejos Vidarte, O.F.M.

Arzobispo Metropolitano de Trujillo

Fundador y Gran Canciller de la Universidad

Católica de Trujillo Benedicto XVI

Dra. Mariana Geraldine Silva Balarezo

Rectora de la Universidad Católica de Trujillo Benedicto XVI

Vicerrectora académica

Dr. Héctor Israel Velásquez Cueva

Decano de la Facultad de Humanidades

Dra. Ena Cecilia Obando Peralta

Vicerrector de Investigación

Dra. Teresa Sofía Reategui Marin

Secretaria General

DEDICATORIA

Con mucho aprecio este trabajo dedico a mi esposa y a mis hijos, quienes representan la esencia de mi vida y el motivo más grande para seguir recorriendo los caminos de la superación.

Con mucha gratitud y cariño a mis padres, por su ejemplo de trabajo y por su apoyo incondicional para sembrar las primeras raíces de mi formación profesional.

AGRADECIMIENTO

A Dios, porque cada día me brinda la oportunidad de seguir viviendo y, además, por otorgarme la fortaleza para seguir por la senda de la superación profesional.

Al Dr. Julio César Matute Calderón, quien, en calidad de mi Asesor, me brindó sugerencias y aportes valiosos para el mejoramiento de mi Trabajo Académico.

Para los docentes que desarrollaron los cursos y que compartieron sus conocimientos y experiencias durante mi formación académica.

DECLARATORIA DE AUTENTICIDAD

Yo, Alejandro Torres Lozano, con DNI 27376628, egresados del Programa de Segunda Especialidad en Didáctica de la Matemática de la Universidad Católica de Trujillo Benedicto XVI, doy fe que he seguido rigurosamente los procedimientos académicos y administrativos emanados por la Universidad, para la elaboración, presentación y sustentación del trabajo académico: "Estrategias heurísticas para la resolución de problemas matemáticos en educación secundaria".

Dejo constancia de la originalidad y autenticidad del mencionado trabajo y declaro bajo juramento en razón a los requerimientos éticos, que el contenido de dicho documento corresponde a nuestra autoría respecto a redacción, organización y diagramación. Asimismo, garantizo que los fundamentos teóricos están respaldados por el referencial bibliográfico, asumiendo los errores que pudieran reflejar como omisión involuntaria respecto al tratamiento de cita de autores, redacción u otros. Lo cual es de mi entera responsabilidad.

Declaro también que el porcentaje de similitud o coincidencias respecto a otros trabajos académicos es de 19 %. Dicho porcentaje, son los permitidos por la Universidad Católica de Trujillo.

El autor.

……………………….

Alejandro Torres Lozano

DNI N° 27376628

PRESENTACIÓN

Señora Decana de la Facultad de Humanidades de la Universidad Católica de Trujillo Benedicto XVI.

Para mi persona es un honor presentar a ustedes el trabajo académico denominado "Estrategias heurísticas para la resolución de problemas matemáticos en educación secundaria", para su correspondiente revisión, corrección y/o sugerencias con el propósito de mejorarlo.

El presente trabajo, aborda principalmente la identificación y descripción de un conjunto de estrategias heurísticas para enfrentar la actividad de resolución de problemas matemáticos en educación secundaria. Para tal fin, se ha revisado y analizado literatura especializada que ha permitido identificar los fundamentos teóricos que sustentan el proceso de resolución de problemas, lo cual ha servido como base para proponer y desarrollar un conjunto de estrategias heurísticas para resolver problemas en el área de matemática.

En tal sentido, el presente trabajo está organizado en tres capítulos. En el capítulo I, se detalla la problemática relacionada a nuestra investigación, la justificación y los objetivos. En el capítulo II, se describen los antecedentes, el fundamento teórico que sustenta el estudio. En el Capítulo III se describe la metodología seguida en la elaboración del trabajo académico. Finalmente, en el Capítulo IV están las conclusiones.

Quedo muy agradecido anticipadamente por la atención que se le preste al presente trabajo académico.

ÍNDICE

RESUMEN

Este trabajo académico denominado “Estrategias heurísticas para la resolución de problemas matemáticos en educación secundaria”, se propone debido a que, se nota un bajo nivel de desempeño en la resolución de problemas en el área de matemática en los estudiantes de educación secundaria, lo cual genera a su vez un bajo rendimiento académico en dicha materia.

En concordancia con lo descrito, el presente trabajo tiene como objetivo general el de identificar las estrategias heurísticas que contribuyan a la resolución de problemas matemáticos en educación secundaria.

Respecto a la metodología, el presente estudio corresponde a una investigación bibliográfica. El método empleado es el descriptivo, la técnica es el análisis documental y el instrumento utilizado es las fichas de resumen.

Como conclusión, se postula que, las estrategias heurísticas identificadas coadyuvan a mejorar el nivel de desempeño en la tarea de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de educación secundaria.

Palabras clave

Problema, Resolución de problemas y Estrategias Heurísticas.

ABSTRACT

This academic work called "Heuristic strategies for the resolution of mathematical problems in secondary education" is proposed because a low level of performance in solving problems in the area of mathematics is noted in secondary education students, which in turn generates low academic performance in this subject.

In accordance with what has been described, the present work has the general objective of identifying the heuristic strategies that contribute to the resolution of mathematical problems in secondary education.

Regarding the methodology, the present study corresponds to a bibliographical investigation. The method used is descriptive, the technique is documentary analysis and the instrument used is summary sheets.

In conclusion, it is postulated that the identified heuristic strategies help to improve the level of performance in the task of solving mathematical problems in high school students.

Keywords

Problem, Problem Solving and Heuristic Strategies.

I. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Realidad problemática y formulación del problema

El área de Matemática es un pilar fundamental para la formación integral de los estudiantes en los diferentes sistemas educativos del Perú y del mundo. Su propósito es contribuir al desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes, las cuales se traducen en la combinación de un conjunto de capacidades para resolver problemas. En concreto, un estudiante es competente matemáticamente si es capaz de resolver diferentes situaciones problemáticas tanto intra como extra matemáticas que se le plantea y cuando aplica los conocimientos matemáticos para comprender e interpretar la realidad y sobre todo para actuar en ella. Esto es, en esencia, la razón y la finalidad de la existencia de la matemática en los currículos escolares.

Sin embargo, en el ámbito peruano, la actual enseñanza-aprendizaje de la Matemática en Educación Secundaria está lejos de alcanzar tan noble y humano propósito escolar y, por el contrario, deja notar las serias dificultades por las que atraviesa, resaltando como una de las más notables, el poco éxito que tienen los alumnos al momento de resolver problemas, tal como, lo demuestran los bajos resultados obtenidos en los exámenes internacionales y nacionales en los que han participado estudiantes del nivel secundario. Así, según el Ministerio de Educación (MINEDU, 2018), los resultados del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiante (PISA, por sus siglas en inglés) del año 2018 muestra que el Perú ocupa el lugar 64 de 77 países participantes, con un promedio de 400 puntos que lo ubica en el nivel 1 de una jerarquía de 6 niveles. Estos resultados ratifican la posición de cuán lejos está el Perú para alcanzar resultados satisfactorios en el marco de la matemática escolar en comparación a otros países.

En el panorama nacional la realidad también es muy preocupante, ya que, a pesar de la implementación de un conjunto de acciones de corte educativo en las que principalmente destacan la dotación de textos escolares de matemática y programas de acompañamiento pedagógico, los aprendizajes matemáticos en educación secundaria siguen siendo muy pobres. A partir de los estudios del MINEDU (2019), los resultados de la Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) 2019 en el área de Matemática en el segundo grado de secundaria muestran una situación precaria ya que solamente el 17, 7% de estudiantes obtienen un rendimiento satisfactorio, mientras que 17,3% se ubican en proceso, 32% en inicio y 33 % en previo al inicio. Todo lo dicho nos demuestra que los alumnos de educación secundaria tienen serias dificultades para resolver situaciones problemáticas correspondientes con su edad y escolaridad. Esta situación según el MINEDU (2023) se empeoró en tiempos de pandemia, puesto que, los resultados de la evaluación muestral 2022 evidencian que el porcentaje de estudiantes en el nivel satisfactorio decreció al 12,7%.

La realidad regional no es ajena a la problemática nacional en lo que respecta a los aprendizajes matemáticos, la ECE 2019, nos indica que a nivel de la Región Cajamarca escasamente el 12% de estudiantes de segundo grado de educación secundaria logran un rendimiento satisfactorio en la resolución de problemas matemáticos, en tanto que, 15,5% está en proceso, 33,9% en inicio y 38,6% en previo al inicio. Con estos resultados la Región Cajamarca se ubica en el puesto 17 a nivel nacional, con un rendimiento promedio de 550 puntos (10 más que en el 2018), que nos ubica en el nivel inicio, el cual está comprendido entre 520 y 596 puntos (MINEDU, 2019). No obstante, según el MINEDU (2023), los resultados de la evaluación muestral 2022 indican un retroceso en el aprendizaje matemático, toda vez que, el nivel satisfactorio sólo fue alcanzado por el 7,5% de estudiantes.

Los resultados descritos líneas arriba seguramente tienen muchas explicaciones. Sin embargo, a nivel educativo tiene que ver mucho con la forma en cómo se enseña y se aprende la matemática. En este orden de ideas, uno de los principales factores que ocasiona la existencia de bajos aprendizajes matemáticos es que no se están implementado los planteamientos didácticos que exige el desarrollo de las competencias matemáticas, sino por el contrario, las clases de matemática están revestidas mayoritariamente con prácticas rutinarias de transmisión de conocimientos y el desarrollo mecánico de ejercicios y problemas descontextualizados, descuidando así la tarea principal de la actividad matemática actual que es la resolución de problemas, ya que a través de dicho proceso el alumno experimenta las potencialidades y la funcionalidad de la Matemática en el ámbito que se desenvuelve. Por consiguiente, si en las clases de matemática no se trabaja de manera permanente y pertinente con situaciones problemáticas; entonces, es lógico pensar en el poco éxito que tendrán los estudiantes cuando se enfrenten a evaluaciones de resolución de problemas, porque lo verán como una tarea extraña a la que recién conocen y eso les genera frustración. No se puede tener éxito en aquello que no se trabaja ni se practica. La única forma de ser competente en la resolución de problemas, es resolviendo problemas.

En esta dirección y tomando como base la manera en cómo se desarrolla el proceso de la resolución de un problema, Carpenter (1980, como se citó en Socas et al., 1989) indica, por ejemplo, que los bajos resultados que se obtienen en evaluaciones nacionales americanas e ingleses de matemática se deben fundamentalmente, a la primacía de una enseñanza que se basa en factores de tipo verbal y lingüístico característicos del hemisferio izquierdo del cerebro. Argumenta que, de las tres fases esenciales para resolver un problema de matemáticas, que son: 1) elaborar un gráfico o dibujo del problema planteado, 2) ejecutar los procedimientos de la estrategia elegida y 3) reflexionar sobre el significado de la solución hallada; las etapas 1 y 3, se corresponden con procesos cognitivos propios del lado derecho del cerebro, pero no se toman en cuenta por la mayor parte de estudiantes que resuelven de manera errada tales situaciones problemas. Esta situación es fácilmente identificable con el método seguido por muchos de nuestros alumnos cuando se les plantea un problema, puesto que tienden siempre a buscan una ecuación para despejar x, en vez de reflexionar sobre él intentando encontrar una estrategia más sencilla que permita resolverlo. Es decir, se tiende a buscar un método, un mecanismo o una fórmula. En criterio del autor de este trabajo, esta manera extremadamente formal y mecánica de resolver los problemas constituyen prácticas bastante enraizadas en un gran grueso de clases de matemática en educación secundaria. Es decir, a parte del poco valor que se da a la resolución de problemas en la clase Matemática, en las poquísimas veces que se trata de resolver un problema, se hace casi siempre buscando únicamente fórmulas que calcen con la situación planteada.

En concordancia con todo lo dicho y siguiendo las ideas de Poggioli (1999) se asume que las principales causas que dan lugar a que los alumnos presenten dificultades al momento de resolver problemas en el Área de Matemática, son: no conocer las fases generales a seguir para la resolución de un problema; poca comprensión del enunciado del problema; tendencia a operar mecánicamente con los datos del problema; dificultad para la planificación del proceso de resolución, poco o nulo dominio de las estrategias heurísticas; ausencia de un proceso metacognitivo y bajos niveles afectivos hacia la resolución de problemas. No obstante, las causas mencionadas no están exentas del propio conocimiento profesional del docente de matemática, lo cual complica un poco más el panorama, porque si quien dirige el proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática tiene problemas para resolver problemas, entonces, los estudiantes tendrán más problemas para alcanzar el éxito en la actividad de resolver problemas.

En este contexto, las carencias descritas traen como razonable consecuencia la tendencia de resolver problemas de manera algorítmica, mecánica y abstracta, lo que a su vez origina un bajo rendimiento en el área de Matemática. Ante tal panorama, surgió la necesidad de proponer y desarrollar un conjunto de estrategias heurísticas generales y específicas que posibiliten a los discentes alcanzar el éxito en la resolución de problemas matemáticos actuando de manera autónoma, reflexiva y creativa. Al respecto, diversos estudios sostienen que, para llegar a resolver problemas, resulta fundamental estar arropado de un nutrido manejo de estrategias heurísticas, ya que constituyen las herramientas mentales por excelencia que hacen avanzar hasta obtener la solución requerida.

Por consiguiente, la situación expuesta conlleva a platear la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son las estrategias heurísticas que contribuyen a la resolución de problemas matemáticos en educación secundaria?

1.2. Formulación de objetivos

1.2.1. Objetivo general

Identificar las estrategias heurísticas que contribuyan a la resolución de problemas matemáticos en educación secundaria.

1.2.2. Objetivos específicos

- Describir el método heurístico general del proceso de resolución de problemas matemáticos en educación secundaria.
- Describir el procedimiento de las diferentes estrategias heurísticas específicas útiles en la resolución de problemas matemáticos en educación secundaria.
- Describir el proceso de enseñanza-aprendizaje de las estrategias heurísticas para resolver problemas matemáticos en educación secundaria.

1.3. Justificación de la investigación

El presente trabajo surge por cuanto se evidencia que los alumnos de educación secundaria presentan serias dificultades al momento de resolver problemas matemáticos, debido al escaso o nulo manejo de estrategias heurísticas tanto generales como específicas para progresar en dicha tarea, lo cual origina que muestren una baja motivación y en otras un gran rechazo y frustración por aprender matemáticas y, por tanto, un bajo rendimiento en dicha área.

En concordancia con lo descrito, la importancia del presente trabajo radica en que contribuirá a la mejora del proceso de resolución de problemas en el área de Matemática en estudiantes de educación secundaria, en tal sentido, el trabajo queda justificado desde el punto de vista teórico, práctico y social, según como se explicita en lo que sigue.

En cuanto a la justificación teórica, el presente trabajo contiene un sólido soporte teórico que fortalece y profundiza el conocimiento sobre la comprensión e importancia que reviste la resolución de problemas en la actual enseñanza-aprendizaje de la Matemática por un lado y, por otro, amplía el conocimiento sobre el proceso a seguir en la resolución de problemas matemáticos, para tal fin se propone y se describe de forma minuciosa el procedimiento que encierra un conjunto de estrategias heurísticas generales y específicas útiles para progresar en la tarea de resolver problemas.

Referente a la justificación práctica, el presente trabajo presenta de manera concreta cómo se aplica las estrategias heurísticas en la resolución de diferentes situaciones problemáticas, lo cual servirá de guía a los estudiantes, pero también a los docentes. En este sentido, se debe destacar que el manejo pertinente de las diferentes estrategias heurísticas tanto generales como específicas por parte de los estudiantes, les permitirá tener mayor éxito en la actividad de resolución de problemas matemáticos tanto dentro del aula como en su vida diaria. De igual forma, contar con un amplio repertorio de estrategias heurísticas contribuye a que los estudiantes al instante de accionar ante situaciones problemáticas lo hagan con mayor seguridad y confianza y mediante una actitud más crítica, creativa y autónoma.

Por último, en lo que concierne a la justificación social, el presente trabajo académico resulta de vital importancia ya que contribuye a fortalecer y desarrollar las competencias profesionales de los profesores, así como, a mejorar el aprendizaje de los estudiantes de educación secundaria en lo que se refiere a la tarea de resolver problemas como eje central del aprendizaje de la Matemática, lo cual capitaliza un beneficio para la comunidad educativa.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes de investigación

2.1.1. Antecedentes internacionales

Peña-Sureda et al. (2021), en su artículo científico: "Aplicación de estrategias heurísticas en la solución de problemas que se modelan mediante ecuaciones algebraicas en estudiantes de una institución educativa", Pontificia Universidad Católica de Puerto Rico, concluyen que, el uso de estrategias heurísticas por parte de los estudiantes es una herramienta que les permite el descubrimiento, la elaboración y el análisis de un plan que a la vez les posibilita tener éxito en la solución de un problema matemático.

Gutiérrez (2018) en su tesis de maestría: "Resultados del método de Polya en el desarrollo de habilidades matemáticas de alumnos del 2° ciclo del centro regional de educación – Concepción", Paraguay, concluyó de manera categórica que, luego de aplicar el método de Polya, los estudiantes demostraron una mejora en las habilidades matemáticas, considerando a los problemas como un reto a su ingenio y esfuerzo.

Patiño et al. (2021) en su artículo científico: "La resolución de problemas matemáticos y los factores que intervienen en su enseñanza y aprendizaje", Colombia; llegan a concluir que, para resolver problemas, los alumnos deben utilizar los diferentes procesos matemáticos de manera coordinada e integrada, esto es, el razonamiento para reconocer variables, la modelación para desarrollar modelos, la comunicación para expresar el conocimiento matemático, las conexiones para establecer el vínculo entre el problema y le contexto, y la representación para construir esquemas o dibujos que muestren las diferentes formas de resolver los problemas.

Ojeda, et al. (2021) en su Tesis de Maestría: "Estrategia heurística de Polya con mediación de Moodle para el fortalecimiento de la competencia de resolución de problemas en contextos numérico y geométricos", Colombia; concluye que, luego de la intervención pedagógica, los estudiantes del octavo grado incrementaron de manera muy significativa su competencia de resolución de problemas, lo cual les permitió que sean capaces en la asimilación de un camino sistemático para resolver problemas, evitando así que realicen operaciones inmediatas, sino que siguen la estrategia de cuatro fase de Polya: comprenden el problema, elaboran un plan, ejecutan dicho plan y verifican si el proceso se ha realizado de manera pertinente, todo esto les conduce enfrentar de la mejor manera los diferentes problemas que se les presenta.

Zumba (2022) en sus Tesis de Maestría: “El método heurístico en la resolución de problemas de razonamiento matemático”, Ecuador; afirma que, el uso del método heurístico permite a los estudiantes comprender el problema desde su propia óptica, relacionándolo con sus sabres previos y con situaciones de su contexto, a su vez les facilita concebir un plan, luego ejecutarlo, para finalmente realizar un proceso reflexivo sobre la solución obtenida y sobre el proceso seguido para encontrarlo. En este sentido, llega a concluir que el método heurístico influye de manera favorable en la resolución de problemas de razonamiento matemático en alumnos de bachillerato.

Peña y Rojas (2019), en su artículo científico: “Aplicación del método heurístico en la resolución de problemas matemáticos en el segundo año de la educación media del Colegio Nacional Agustín F. de Pinedo, Año 2017”, Paraguay; concluyen que, luego de entrenar a los estudiantes en la metodología heurística adquieren las destrezas correspondientes para seguir el camino necesario al resolver un problema, por tanto, confirman que al aplicar el método heurístico se mejora el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas matemáticos en los estudiantes.

Dominguez y Espinoza (2019) en su Tesis de Maestría: “Potenciar la resolución de problemas matemáticos desarrollando habilidades del pensamiento desde una mirada heurística”, Colombia; concluyen que, al implementar actividades y estrategias cimentadas en el método heurístico brindan las herramientas cognitivas que permiten a los estudiantes el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas matemáticos, contribuyendo de este modo a la mejora de la educación matemática.

2.1.2. Antecedentes nacionales

Mendoza (2018) en su artículo científico: "Estrategias heurísticas para incrementar la capacidad de resolución de problemas en estudiantes de educación secundaria", concluye que, la utilización de estrategias heurísticas mejora significativamente la capacidad de los estudiantes de educación secundaria para resolver problemas. Dicha mejora se da en el manejo del lenguaje simbólico, en la identificación de patrones, en la comunicación, en la explicación y en la justificación de resultados.

Espinoza (2018) en su tesis de maestría: "El programa estrategias heurísticas en la resolución de problemas matemáticas en estudiantes del 2do grado de primaria de la I.E. 1025 El Augustino 2016", Universidad César Vallejo, concluyó que, el desarrollo del programa de estrategias heurísticas incrementó el nivel de las capacidades en la resolución de problemas de matemáticas en alumnos del segundo grado de primaria.

Carruitero y Oseda (2021) en su artículo científico: "Estrategias heurísticas en el desarrollo de competencias matemáticas en la institución educativa N° 80127 Huamachuco -2020", llegaron a concluir que, cuanto más se trabaje en la aplicación de las estrategias heurísticas más desarrollo se logrará en las competencias matemáticas en los estudiantes.

Ruiz (2017) en su tesis de maestría: "Las estrategias heurísticas y la resolución de problemas de los estudiantes del tercer año de Secundaria de la I.E.N° 6094 "Santa Rosa". Chorrillos"; Lima, 2016", Universidad César Vallejo, concluyó que, el empleo de las estrategias heurísticas permite la resolución de problemas por parte de los estudiantes.

Castillo (2022) en su artículo científico: "Taller de estrategias heurísticas para resolver problemas de cantidad en estudiantes de primaria, Usquil-Otuzco 2022", llega a concluir que, el uso del Taller de estrategias heurísticas influye significativamente en la mejora de la competencia de resolución de problemas matemáticos de cantidad en alumnos del cuarto y quinto grado del nivel primario, tanto a nivel de interpretación de datos y expresiones simbólicas como a nivel de razonamiento y demostración, lo cual genera un desarrollo progresivo en el aprendizaje de la matemática.

Medina y Pérez (2021) en su artículo científico: “Influencia de las estrategias heurísticas en el aprendizaje de la matemática”, concluye que, la aplicación de estrategias heurísticas influye en la mejora del aprendizaje de la matemática en alumnos del quinto grado de educación secundaria, lo cual se traduce en la mejora de las cuatro competencias matemáticas que establece el programa curricular del área de matemática, posibilitando la tarea para hallar la solución de problemas, así como, permitiendo la toma de decisiones pertinentes mediante métodos que estimulan el pensamiento reflexivo.

Valdivia (2022) en su Tesis de Maestría: “Estrategia heurística para desarrollar la capacidad resolución de problemas en los estudiantes de formación docente en un Instituto Superior Pedagógico Privado de Lima”, concluye que, las estrategias heurísticas poseen potencialidades curriculares que desempeñan un papel determinante para desarrollar la capacidad de resolución de problemas en alumnos de formación inicial docente, puesto que permiten resolver situaciones problemáticas desde una mirada multidisciplinar.

2.1.3. Antecedentes regionales y/o locales

Pérez (2021) en su Tesis de Segunda Especialidad: “Aplicación del método Polya para la resolución de problemas aditivos en las alumnas del tercer grado “C”, Institución Educativa N° 82949 “Belén”, Cajamarca”, Universidad Nacional de Cajamarca, concluyó que, la aplicación del método Polya contribuye a la mejora del nivel de logro de las capacidades de resolución de problemas de los estudiantes en el área de matemática en el marco de las exigencias que plantea la educación peruana.

Fernández (2020) en su Tesis de Maestría: “Estrategias heurísticas para desarrollar la capacidad de resolución de problemas matemáticos en estudiantes del Instituto Superior Pedagógico Público Víctor Andrés Belaunde de Jaén – Cajamarca”; llegó a concluir que, luego aplicar las estrategias heurísticas, la capacidad para resolver problemas de los estudiantes de magisterio se fortaleció de manera notable, encontrándose diferencias significativas en el nivel de desempeño en cada una de las dimensiones que conforman dicha capacidad.

2.2. Referencial teórico

2.2.1. La resolución de problemas matemáticos

2.2.1.1. La resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de la matemática

Actualmente, hay un consenso en el seno de la comunidad científica educativa para considerar a la resolución de problemas como núcleo central y la columna vertebral sobre la cual se tiene que construir el edificio de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en los diferentes niveles educativos. Es decir, la resolución de problemas se constituye en un generador del conocimiento matemático.

Al respecto, De Guzmán (2007) sostiene que, la tendencia general de mayor difusión en la actualidad es enfatizar en el dominio de los procesos de pensamiento propios de la Matemática y no en la árida tarea de transferir contenidos. La Matemática es en esencia saber hacer, es una disciplina en la que la estrategia ejerce predominio sobre el contenido, es por tal razón que, se brinda un interés capital al estudio de los factores cognitivos inmersos en la resolución de problemas. En este sentido, según el este mismo autor, lograr esta nueva meta en la educación matemática requiere centrar esfuerzos en la enseñanza de estrategias heurísticas pertinentes para resolver verdaderos problemas de manera autónoma y creativa, más que en la infructuosa transmisión de recetas algorítmicas. De todo lo dicho, se afirma que aprender matemática es matematizar, es decir, hacer matemática, y, hacer matemática es equivalente a resolver problemas, para lo cual es necesario estar empoderado en el manejo de recursos heurísticos y afectivos. En esta línea, la resolución de problemas debe impregnar toda la actividad matemática, puesto que resulta ser un medio potente para desarrollar los procesos del pensamiento matemático y para poner en práctica la utilidad práctica e instrumental de la matemática.

La utilidad de la resolución de problemas en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática toma su lugar a partir de la década de los ochenta y nace como una reacción a la enseñanza algorítmica y formalista de la Matemática, puesto que, a pesar que muchos alumnos eran capaces de hacer operaciones, en el fondo no comprendían el significado o sentido de las respuestas que obtenían. Frente a esta problemática, en el año de 1980, el Consejo Nacional de Profesores de Matemática (NCTM, por sus siglas en inglés) de Estados Unidos, declaraba que el objetivo central de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas debe ser la resolución de problemas. Por su parte, Santaló, destacado estudioso español en el seno de la didáctica de la matemática, en 1985 indica que, enseñar Matemática debe ser lo mismo que enseñar a resolver problemas. Es decir, estudiar y aprender matemática no debe ser otra cosa que pensar en la solución de problemas. De igual manera, en una conferencia brindada en 1968, Polya decía que se justifica de buena manera que el total de libros de Matemática, incluyan problemas. Los problemas se pueden considerar incluso como el punto más primordial de la educación matemática" (MINEDU, 2007).

En la misma perspectiva de lo dicho hasta aquí, De Guzmán (1984) argumenta que, lo más importante en la enseñanza de la matemática es empoderan a los estudiantes en los procesos de pensamiento que les resulten pertinentes para resolver problemas matemáticos y no matemáticos. En este sentido, sostiene que de nada sirve depositar en la mente de los alumnos un cúmulo de teoremas y propiedades referentes a un tema sin mayor significado que después no lo van a utilizar. Por lo que, categóricamente sostiene que la resolución de problemas con mucha razón representa el corazón de las matemáticas, puesto que allí es donde se experimenta la verdadera importancia y la utilidad de la Matemática, ya que al enfrentarse con problemas desafiantes originan grandes motivaciones, actitudes positivas y herramientas para desarrollar procesos mentales, esto es, la esencia y existencia misma de las matemáticas.

En concordancia con lo descrito, el MINEDU (2008) en lo referente a la resolución de problemas sostiene su utilidad para la construcción de nuevos conocimientos a partir de situaciones de contextos reales o matemáticos; para luego poder aplicar y adaptar diferentes estrategias en variados escenarios, así como, controlar el proceso de resolución reflexionando sobre lo realizado y sus resultados. Así mismo, la capacidad para plantear y resolver problemas, gracias a su naturaleza integradora permite la interrelación con otras áreas, lo cual coadyuva al desarrollo de otras habilidades; del mismo modo, permite la conexión de las ideas matemáticas con el interés y la experiencia de los estudiantes. A partir de lo planteado, se postula que la resolución de problemas debe convertirse en un elemento que articule el trabajo matemático con las vivencias de los estudiantes, lo cual por cierto les dará mayor significatividad a los aprendizajes matemáticos.

En suma, la actividad de resolución de problemas es el detonante para desarrollar competencias matemáticas. A saber, cuando un estudiante se enfrenta a situaciones problemáticas complejas y desafiantes, para hallar su solución requiere que ponga en práctica de manera combinada las diferentes capacidades matemáticas, esto es, elaborar modelos numéricos, algebraicos, geométricos o estadísticos/probabilísticos; comunicar su comprensión sobre las relaciones numéricas, algebraicas, geométricas o estadísticas/probabilísticas; utilizar estrategias y procedimientos para resolver el problemas; y, por último, argumentar afirmaciones sobre las relaciones encontradas. En este sentido, si al resolver un problema se evidencia que se han movilizado de forma articulada todas las capacidades matemáticas, entonces, se puede afirmar categóricamente que se está desarrollando las competencias matemáticas. Por consiguiente, es la resolución de problemas el principal medio que posibilita el trabajo por competencias en el área de Matemática. Además, la actividad de resolución de problemas permite poner en práctica factores afectivos y otros procesos cognitivos, tales como: la atención, percepción, memoria, razonamiento, creatividad y metacognición que, a su vez, coadyuvan a una gran variedad de transferencias y aplicaciones a otras áreas y situaciones de la vida cotidiana. Por esta razón, resolver problemas representa el núcleo fundamental de la actividad matemática, ya que permite a los estudiantes y docentes experimentar la potencia y el fin utilitario de la matemática en el contexto que se desenvuelven.

2.2.1.2. Los problemas: definición, características y clasificación

Actualmente, hay un consenso en el seno de la comunidad científica educativa para considerar a la resolución de problemas como núcleo central y la columna vertebral sobre la cual se tiene que construir el edificio de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en los diferentes niveles educativos. Es decir, la resolución de problemas se constituye en un generador del conocimiento matemático.

Lo difícil que resulta encontrar una definición del término problema tiene que ver con el esfuerzo que despliega un individuo al momento que intenta resolver un problema. Esto quiere decir que, en tanto para ciertos sujetos puede significar una gran labor el proceso de resolver un problema, para otros en cambio puede resultar un sencillo procedimiento rutinario. En este sentido, la existencia de un problema matemático no es una característica inherente de la labor matemática, sino está relacionada con la interacción de la persona con dicha tarea (NCTM, 1974). Sin embargo, la otra forma de entender la definición de un problema es teniendo en cuenta su propia naturaleza, es decir, su esencia misma. En este sentido, un problema está determinado no en función del esfuerzo del individuo, sino en su estructura misma, en otras palabras, cuando su resolución requiere no de algoritmos sino de recursos heurísticos.

En son de lo expresado, para Polya (1961, citado en García, 2001) "Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata" (p.6). Según Schoenfeld (1989) "Un problema matemático es una tarea: a) en la cual el alumno está interesado e involucrado y para la cual desea obtener una resolución; y b) para la cual el alumno no dispone de un medio matemático accesible para lograr esa resolución" (p.148). Por su parte, De Guzmán (2007) afirma: "Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida y otras un tanto confusamente perfilado, y no conozco el camino que me pueda llevar de una a otra" (p.34). De las definiciones presentadas, se postula que un problema matemático existe cuando al individuo que se le plantea reconoce que hay una dificultar por resolver, sin contar con los recursos matemáticos inmediatos para hallar su solución, sino que resulta necesario un proceso de razonamiento para formular un camino a seguir mediante la aplicación de una o más estrategias heurísticas, acompañadas de una adecuada y oportuna reflexión sobre las acciones que se van desarrollando.

En cuanto a las características de un problema, Polya (1961, citado en García, 2001) considera tres características que componen un problema, las cuales son: Tener consciencia de que hay una dificultad, poseer anhelo de resolverlo y comprender que no existe una ruta rápida para hallar su solución. Por su parte, García (2001) considera que un problema debe cumplir con tres características, a saber: 1) Aceptación**,** en la cual la persona o grupo debe mostrar motivación y compromiso real ante un problema, 2) Bloqueo**,** que consiste en entender que los primeros esfuerzos y los métodos rutinarios de enfrentar el problema no siempre son fructuosos, y 3) Exploración**,** lo cual invita a buscar, crear o producir nuevas estrategias para abordar el problema. En la misma dirección, para Santos (1997), un problema en línea general, es una tarea o situación que se caracteriza por la existencia de un interés por querer encontrar una solución, el no contar con una solución inmediata, la presencia de diferentes estrategias de solución y la atención por parte de un individuo o un grupo para realizar un conjunto de acciones hasta llegar a resolver el problema. Por consiguiente, los problemas en matemáticas están caracterizados por presentar una situación inicial conocida denominada datos y una situación final desconocida llamada incógnita, siendo su ruta de solución poco desconocida que se concretiza mediante la aplicación de estrategias y/o procedimientos heurísticos, los mismos que nos posibilitarán avanzar hacia el logro de la solución buscada, pero además debe existir interés por resolverlo.

En cuanto a la clasificación de los problemas, existen diferentes propuestas que toman en cuenta, por un lado, la estructura y contenido del problema y, por otro, los tipos de procesos que intervienen en su resolución. Para efectos del presente trabajo consideraremos las consideradas por Polya, el Ministerio de Educación de nuestro país y Fridman. Polya (1965), sugiere dos clases de problemas: problemas por resolver y problemas por demostrar. Los problemas por resolver son aquellos en los que se pide hallar algo, para tal fin, el problema presenta ciertas condiciones y datos, y el propósito es encontrar el valor de una determinada incógnita. Ejemplo: Hallar el área de un rectángulo dado la longitud de sus lados. Los problemas por demostrar son aquellos en donde algo debe ser probado. Ejemplo: Demostrar el Teorema de Pitágoras.

El MINEDU (2006) propone la siguiente clasificación de los problemas, que son: tipo, heurísticos, rompecabezas y derivado de proyectos. Los problemas tipo se caracterizan porque en su enunciado se expresa de manera implícita las operaciones que una persona debe desarrollar para llegar a la solución del problema. Ejemplo: Una frutera ofreció 7 piñas a 3 soles cada una y 5 papayas a 4 soles cada una. ¿Cuántos soles obtuvo por la venta? Los problemas heurísticos consisten en que, en su enunciado no aparece de manera implícita el proceso a ejecutar, incidiendo más en buscar una estrategia para determinar la solución. Ejemplo: Roberto tiene que cancelar S/.45 por una camisa. ¿Cuántas formas tiene para pagar si solamente posee monedas de 1 y 5 soles y un billete de 10 soles? Los problemas rompecabezas, se caracterizan porque su solución generalmente se encuentra por ensayo y error. Ejemplo: ¿Cuántos cuadriláteros hay en un tablero de ajedrez? Los problemas derivados de proyecto son generados a partir de la formulación de un proyecto a desarrollarse en situaciones reales. Ejemplo: Una I.E. que se encuentra en una zona rural, necesita trasladar a sus estudiantes para participar en los Juegos Florales en la ciudad de Lima. Hallar el presupuesto que necesita.

Por último, Fridman (1995) propone dos clases de problemas: prácticos y matemáticos. Los problemas prácticos, también llamados aplicados o extramatemáticos, son aquellos en donde como mínimo un objeto es de naturaleza real o material. Ejemplo: En un evento deportivo la entrada de adultos cuesta S/.8 y la de niños S/.5; si asistieron 120 sujetos y se juntaron S/.810, ¿cuántos niños y adultos participaron? Los problemas matemáticos llamados también intramatemáticos, son aquellos en que los objetos son de predominancia matemática (números, figuras geométricas, funciones, conjuntos, etc.). Ejemplo: El punto de tangencia de una circunferencia inscrita en un trapecio rectángulo divide al mayor de los lados no paralelos en dos segmentos que miden 1m y 9m respectivamente. Encontrar la medida de la base menor del trapecio.

2.2.1.3. Factores que intervienen en la resolución de problemas

Actualmente, hay un consenso en el seno de la comunidad científica educativa para considerar a la resolución de problemas como núcleo central y la columna vertebral sobre la cual se tiene que construir el edificio de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en los diferentes niveles educativos. Es decir, la resolución de problemas se constituye en un generador del conocimiento matemático.

La resolución de problemas es una actividad compleja que involucra diferentes procesos tanto de naturaleza cognitiva como afectiva. Al respecto, Schoenfeld (1985, como se citó en Santos, 1997 y 2014) tomando en cuenta los estudios de varios autores, determinó la existencia de cuatro factores que influyen en el proceso de resolver problemas, las cuales son: los recursos o conocimientos de base, las estrategias heurísticas, las estrategias metacognitivas y el sistema de creencias. Cada uno de dichos factores se detallan en seguida.

Los recursos o conocimientos de base constituyen un inventario de lo que los individuos saben y de la manera en que obtiene tal conocimiento. Los aspectos que forman parte del conocimiento para el desempeño en resolución de problemas comprenden: el conocimiento intuitivo e informal respecto al dominio del problema, los hechos y definiciones, los procedimientos algorítmicos y el conocimiento acerca del discurso del dominio.

Las estrategias heurísticas comprenden las operaciones cognitivas que permiten avanzar en el proceso de resolución de un problema, esto es, desde los datos llegar a la meta o solución. Polya (1945, como se citó en

Santos, 1997) identificó un conjunto de heurísticas de uso común en el proceso de resolver problemas matemáticos. Así, por ejemplo, al momento de enfrentarse a un problema, el resolutor puede aplicar el razonamiento analógico, descomponer el problema en partes, utilizar gráficos, explorar casos específicos, introducir elementos auxiliares en el problema, entre otros. De todo lo dicho, es necesario aclarar que, toda estrategia heurística se operativiza mediante la aplicación de conceptos y procedimientos algorítmicos.

La metacognición tiene que ver con el conocimiento del propio proceso cognoscitivo, con el monitoreo activo y con el acto de regular las decisiones y los procesos aplicados en la resolución del problema. Es decir, durante toda la actividad que demanda resolver un problema, resulta de vital importancia revisar si los procedimientos que se está ejecutando son los correctos, este control oportuno permite resolver un problema con mayor efectividad. En esta línea, Schoenfeld (1987, como se citó en Santos,1997) identifica tres categorías donde se evidencia la metacognición al momento de resolver un problema. La primera está referida al conocimiento acerca del propio proceso y a la descripción del propio proceso de pensamiento. La segunda, es el control y la autorregulación que está relacionada a la capacidad del sujeto de seguir lo que ejecuta al momento que resuelve cierto problema y con qué eficiencia se ajusta al proceso (ejecución de acciones) teniendo en consideración alguna observación que se realice en el desarrollo de dichas acciones. La tercera comprende las creencias e intuiciones entendidas como las ideas acerca de la matemática que se muestran durante el trabajo matemático y su relación o identificación con determinadas tendencias existentes en la resolución de problemas.

Finalmente, el sistema de creencias incluye las concepciones, ideas o imagen que una persona sostiene sobre la matemática e influyen en la manera cómo elige un determinado proceso o estrategia para resolver el problema. Además, las creencias impregnan el contexto en el cual ocurre el funcionamiento de los conocimientos, las estrategias heurísticas y la metacognición. En relación al tipo de creencias que los individuos muestran acerca de la matemática y de manera específica sobre la resolución de problemas, Schoenfeld (1992, como se citó en Santos, 1997 y 2014) registra las siguientes: a) Si se solicita un punto de vista referente a un problema o situación matemática, resulta suficiente brindar una opinión al respecto, b) La totalidad de problemas de matemáticas se pueden resolver en diez minutos o menos, si uno comprende el contenido, c) Solamente los inteligentes son aptos para el descubrimiento, la creación y el entendimiento de la matemática y, d) La matemática formal y las demostraciones poco o nada tienen que ver con el proceso de desarrollar o descubrir los conceptos matemáticos. Además, según el mismo autor, las creencias que sostienen los estudiantes referentes a la matemática, son producto de la forma en que son instruidos en el aula de clases.

2.2.2. Las estrategias heurísticas para la resolución de problemas

La resolución de problemas es un proceso de orden superior que a su vez requiere de otros procesos psicológicos tales como son la atención, la percepción, la memoria, el lenguaje, el pensamiento, la inteligencia, la metacognición, las emociones, etc. En este contexto, un potencial significado del término resolución de problemas es entenderlo o percibirlo como una habilidad. Esto es, resolver situaciones problemáticas no rutinarias se caracteriza como una habilidad de nivel superior que se adquiere a partir del aprendizaje de conceptos y procesos matemáticos básicos o elementales (Figueroa, 2006).

En esta línea, comprender qué es el proceso de resolución de problemas es un punto clave porque clarifica qué se debe hacer para hallar la solución a una situación problemática planteada. Por ejemplo, para Polya (1981, como se citó en Sigarreta y Laborde, 2004) resolver un problema es hallar un camino que no se sabía con anterioridad, es buscar la manera de afrontar una dificultad o de salir de un obstáculo, es alcanzar el fin anhelado, que no se puede conseguir de modo inmediato, utilizando para ello los recursos adecuados. Por su parte, García (2001) argumenta que resolver un problema estructurado es disponer y aplicar tanto procedimientos algorítmicos como estrategias heurísticas con el fin de convertir el estado inicial en estado final, considerando las condiciones y restricciones respectivas. De igual modo, según Mazario (2009) la habilidad de resolver problemas de matemáticas es un proceso que conlleva realizar una secuencia o serie de acciones para obtener una respuesta pertinente a una dificultad con el propósito de resolverla, esto es, satisfacer las exigencias plasmadas en las metas y objetivos que conduzcan a determinar la respuesta del problema planteado. Esta manera de definir hace énfasis en la condición de proceso con que se reconoce a tal habilidad, lo que se corresponde con la tarea de descomponer en diversas acciones progresivas a desarrollarse de manera integral, las cuales se suceden unas tras otras hasta llegar a encontrar el resultado o solución del problema matemático. De todo lo expresado, se puede afirmar que la resolución de problemas es un proceso lógico, creativo, razonado y afectivo que requiere de la realización de un conjunto de actividades concatenadas con la finalidad de obtener la solución de un problema teniendo en cuenta los datos y condiciones y, la aplicación de estrategias heurísticas.

Resolver un problema es todo un recorrido que se tiene que transitar para convertir los datos en metas. Este tránsito depende de la mediación y aplicación de un conjunto de conocimientos, operaciones mentales, procesos metacognitivos y factores afectivos que debe manejar el estudiante para selección, formular, relacionar y tomar decisiones acertadas en cuanto a qué estrategias heurísticas puede utilizar para resolver los diversos problemas que se le planteen. No obstante, en el presente trabajo se considera que las estrategias heurísticas se constituyen en los soportes fundamentales para avanzar hacia la búsqueda de la solución de un problema, con la salvedad que requiere del soporte y acompañamiento de los restantes tres factores.

El valor de las heurísticas en la resolución de problemas es defendido por Foong (2013) cuando señala que el proceso de resolver problemas, de manera general, se asocia a los heurísticos, los mismos que se pueden definir como estrategias utilizadas para progresar a la solución de un problema. En forma más específica, según Polya (1965), la heurística comprende el método que conlleva a la solución de un problema, particularmente las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso. Reafirmado lo dicho, García (2001), sostiene que las heurísticas son las operaciones mentales propiamente útiles en la resolución de problemas, son como reglas o formas de actuación que tienden a favorecer el éxito en el proceso de resolución de problemas, sugerencias generales que facilitan al sujeto o grupo a una mejor comprensión del problema y a realizar progresos para alcanzar su solución. Por consiguiente, se asume que las estrategias heurísticas son las grandes herramientas del pensamiento matemático que al ser utilizadas de manera pertinente permiten llegar a resolver problemas. Las estrategias heurísticas no garantizan por sí mismas la solución de un problema, pero sí incrementan la posibilidad de éxito. Es necesario tener en cuenta que no es suficiente que el alumno conozca las diferentes estrategias, sino lo ideal es que participe en experiencias relacionadas con el por qué y cómo utilizarlas de manera comprensiva en diferentes situaciones problemáticas.

En cuanto a las estrategias heurísticas útiles en el proceso de resolución de problemas, se puede identificar tanto a las estrategias generales como a las específicas. Así, a partir de los trabajos de Polya (1965) y De Guzmán (1995; 2004) se deduce que existen, por un lado, métodos heurísticos generales que incluyen las etapas del proceso de resolución de un problema y, por otro, estrategias más específicas dentro de cada una de las etapas, denominadas heurísticas o estrategias heurísticas específicas. En esta línea, se concuerda con los planteamientos de Ferreira y Lorenzo (2013) y Foong (2013) que afirman que demás de las estrategias heurísticas generales, existen otras específicas que serían de mucha utilidad para progresar en busca de la solución de un problema matemático planteado. De esta forma, en el presente trabajo se asume que las estrategias heurísticas para resolver un problema son de dos tipos: generales y específicas, las mismas que se detallan en lo que sigue.

2.2.2.1. Estrategias heurísticas generales

Las estrategias heurísticas generales comprenden los métodos heurísticos que conducen el proceso de resolución de problemas mediante la aplicación de un conjunto de fases o etapas secuenciales de acciones. En este contexto, los métodos heurísticos son estrategias heurísticas generales de resolución y reglas de decisión que utilizan los que resuelven problemas de matemáticas, basadas en experiencias previas con problemas parecidos. Para Ferreyra y Lorenzo (2013, p.30), “las estrategias generales son procedimientos independientes de un contenido dado, son pautas, recomendaciones, sugerencias, cuya aplicación transformará el problema original en otro, probablemente más accesible". Es decir, estas estrategias sugieren las rutas o posibles vías a seguir para hallar una solución al problema planteado.

Existente diferentes métodos heurísticos que permiten resolver problemas, sin embargo, dentro de las estrategias heurísticas generales más utilizadas podemos señalar los métodos heurísticos propuestos por Polya, Schoenfeld y De Guzmán. El método heurístico de Polya (1965) consta que cuatro fase o etapas: Comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y visión retrospectiva. Por su parte Schoenfeld (1985, como se citó en Blanco, 1996 y Santos, 1997) propuso las siguientes etapas: Análisis, exploración y verificar la solución. Por último, De Guzmán (1995; 2004) formuló un método heurístico que comprende cuatro etapas: Familiarización con el problema, búsqueda de estrategias, llevar adelante la estrategia y, revisar el proceso y sacar consecuencia de él. A continuación, se describen cada una de las estrategias generales o métodos heurísticos planteados por los autores señalados para luego presentar un método heurístico general desarrollado por el autor del presente trabajo académico.

Polya (1965), plantea cuatro etapas en la resolución de un problema. En cada etapa propone una serie de sugerencias, interrogantes y estrategias heurísticas específicas que al aplicarlas de forma adecuada ayudan a resolver el problema. Las cuatro etapas y sus respectivas heurísticas se detallan en los párrafos siguientes.

Comprender el problema. Esta etapa es la puerta de entrada al proceso de resolver un problema y, por lo tanto, el progreso en dicha tarea depende mucho de la forma en cómo se implemente esta primera etapa. Una buena comprensión del problema tiene que ver con identificar los diferentes elementos del problema (datos, metas y condiciones) y entender la relación que existe entre ellos, lo cual se constituye en el preámbulo para visualizar un posible camino hacia la solución. Para tal fin, en esta etapa es muy importante la lectura analítica del problema y la explicación del mismo con las propias palabras por parte del resolutor. Por su parte, Polya (1965) postula que en esta etapa de deben plantear las siguientes sugerencias heurísticas: Identificar la incógnita o incógnitas, reconocer los datos que contiene el problema e identificar la condición y analizar si es suficiente, insuficiente, redundante o contradictoria.

Concebir un plan. Luego de haber identificado los elementos del problema y comprendido la relación que existe entre ellos, corresponde a esta etapa hacer uso del razonamiento y pensamiento matemático para matematizar la situación planteada, es decir, traducir el problema a un lenguaje matemático, representándolo generalmente por medio de modelos concretos, gráficos o simbólicos. Por otro lado, el trabajo en esta etapa concluye con la formulación, planteamiento o selección de la estrategia heurística específica que permita avanzar en el proceso de resolución de los problemas. Polya (1965) acompaña esta etapa con las siguientes sugerencias: Enunciar el problema con palabras propias o plantearlo de manera un poco diferente, identificar un problema semejante y relacionado con el propuesto que tenga la misma o similar incógnita o datos, recordar si alguna vez encontró el mismo problema pero con un planteo levemente diferente, reconoce algún teorema que pueda ser de utilidad, ver si se puede utilizar la estrategia de un problema similar que resolvió, tratar de utilizar elementos auxiliares, resolver un problema análogo pero más imple o con datos particulares, tratar de resolver una parte del problema, ver si se ha empelado todos los datos y condiciones, entre otras.

Ejecutar el plan. Corresponde en esta etapa realizar los diferentes procesos lógicos y/o procedimientos algorítmicos que permitan materializar la estrategia heurística específica planteada o elegida para determinar la solución del problema. Generalmente las estrategias heurísticas específicas se operativizan mediante diferentes procedimientos algorítmicos. Las estrategias que sugiere Polya (1965) para esta etapa son: Durante la ejecución misma del plan de solución se debe analizar cada uno de los pasos seguidos, determinar si el paso desarrollado es el correcto y, sobre todo, tratar de demostrar o evidenciar su ejecución. En suma, al momento que se está realizando cada paso u operación que conduce a encontrar la respuesta al problema planteado, es necesario que a la par se vaya viendo si lo que se está ejecutando se hace de manera correcta o lógica.

Examinar la solución. Ésta es la cuarta y última etapa y comprende un conjunto de acciones que conllevan a reflexionar sobre si el resultado obtenido y el razonamiento utilizado son los que corresponden o son los correctos. El hecho de ser la última etapa del proceso, no por eso es el final del mismo, sino más bien, es el inicio de un trabajo más profundo que además de lo ya indicado abarca la exuberante tarea de resolver el problema de otras formas, lo cual dará mayor riqueza al propio proceso de resolución, dado que se será más significativo resolver un problema por diferentes estrategias que, resolver diferentes problemas de una única manera o aplicando un único método. Lo primero permite significar que el proceso de resolución de problemas es un acto creativo cuya solución se halla por diferentes vías, en cambio, el segundo enfoque conlleva en cierto modo a la concepción equivocada que resolver un problema es una tarea convergente que consiste en buscar el único mecanismo mágico para encontrar la solución. Polya (1965) refuerza de manera categórica lo expresado al proponer las siguientes heurísticas para esta fase: Se debe verificar el resultado y el razonamiento empleado, tratar de hallar la respuesta de otras maneras y, además, analizar si el resultado hallado o el método seguido se puede utilizar en otros problemas.

Una segunda estrategia heurística general de capital importancia para enfrentarse a la resolución de problemas matemáticos es la que propone Schoenfeld (1985, como se citó Blanco, 1996 y Santos, 1997), la cual consta de tres etapas y sus respectivas heurísticas como se indica en seguida.

Análisis. Consiste básicamente en comprender el problema y sus diferentes elementos como son: datos, incógnita y condiciones. Esta etapa según su propio autor comprende las siguientes sugerencias o estrategias heurísticas específicas: a) Elaborar un diagrama cuando sea posible. b) Tratar de examinar casos particulares, que a su vez incluye: seleccionar valores especiales que posibiliten la ejemplificación del problema y la examinación de casos límite o extremos con el fin de explorar el posible rango de valores que asuma la variable o analizar determinados valores para determinar algún patrón o regularidad. Por último, c) Se debe procurar la simplificación del problema mediante la utilización de simetría y argumentos sin que se pierda la generalidad.

Exploración. Abarca tres tipos de estrategias heurísticas específicas. a) Consideración de problemas equivalente que incluye el reemplazo de ciertas condiciones por otras análogas; recombinación de los elementos del problema en diversos modos; introducción de elementos auxiliares y reformulación del problema utilizando un determinado giro en la perspectiva o notación, considerando que se involucre el método de contradicción, y determinado sus propiedades a partir de que el problema ya está resuelto. b) Consideración de problemas con ligeras modificaciones que destaque la selección de submetas en función de las condiciones, la descomposición del dominio del problema y el trabajo caso por caso. c) Consideración de problemas con sustanciales modificaciones que incluyan el diseño de un problema semejante con menor cantidad de variables, fijación de la totalidad de variables y trabajar cualquier problema relacionado que presente similitudes en cuanto a la forma, a los datos y a las condiciones.

Verificar la solución. Una vez hallada la solución del problema, corresponde juzgarla de manera crítica para establecer su validez. Esta etapa está constituida por dos estrategias, que son: a) Comprobar si la solución cumple con las siguientes pruebas: ver si se ha utilizado todos los datos pertinentes, si concuerda con la predicción o estimación original y si cumple con la prueba de simetría. b) Verificar los criterios generales en los cuales la solución del problema se obtenga de otra forma diferente, pueda reforzarse con otros casos especiales, ver si es posible que se reduzca a resultados conocidos y constatar si se puede utilizar para producir algo ya conocido.

Una tercera estrategia heurística general de mucha utilidad en el proceso de resolución de problemas en la actual enseñanza-aprendizaje de la matemática escolar fue la formulada por De Guzmán (1995; 2004) que está conformada por cuatro etapas similar a las planteadas por Polya, con la ventaja de que en cada etapa propone con mayor nitidez un conjunto de estrategias heurísticas específicas que puestas en valor conducirán hacia el hallazgo de la solución de un problema. Dichas etapas y sus correspondientes sugerencias y heurísticas específicas se describen en lo que sigue.

Familiarízate con el problema. Tiene que ver con tomar contacto con la situación problemática planteada. Esta etapa se implementa mediante la implementación de las siguientes sugerencias y estrategias heurísticas específicas: Tratar de comprender de manera profunda la situación problemática; expresarlo con las propias palabras; al momento de enfrentarlo se debe hacer con paz, de forma calmada y a un ritmo propio; divertirse con la situación planteada; tratar de comprender el aire y sentido del problema; y, perderlo el temor.

Búsqueda de estrategias. Comprende un repertorio muy nutrido de estrategias heurísticas específicas y la tarea del resolutor será pensar de manera crítica y creativa para seleccionar la heurística o combinar un conjunto de heurísticas que le posibiliten obtener la solución del problema. Entre este abanico de heurísticas específicas propuestas por el autor mencionado, destacan: se debe empezar por lo más fácil, tratar de experimentar y buscar regularidades o patrones, hacer un esquema, una figura, un diagrama, un gráfico, modificar el problema para cambiar en cierto modo el enunciado y para observar si se vislumbra o aparece un posible camino, escoger una adecuada notación y un lenguaje pertinente, buscar un problema semejante, suponer el problema resuelta, explorar la simetría, empezar por el final, pensar en la inducción y analizar si se puede aplicar del palomar.

Lleva adelante tu estrategia. Consiste en desarrollar los procedimientos matemáticos y lógicos que abarcan las estrategias heurísticas específicas planteadas. El autor indicado sugiere las siguientes estrategias heurísticas específicas: Seleccionar y poner en práctica las mejores ideas que hayan aparecido en la etapa precedente, actuar de manera flexible, no darse por vencido de manera fácil, no aferrarse a una sola o misma idea, buscar otras probables vías o caminos si las cosas resultan complicadas y contemplar con mucho detenimiento la solución, es decir, analizar a fondo la respuesta encontrada.

Revisa el proceso y saca consecuencias de él. Abarca un trabajo reflexivo sobre el camino seguido para resolver el problema. Entre las estrategias propuestas por el autor resaltan: Examinar con profundidad el camino que se siguió, saber explicar cómo se llegó a la solución o por qué no se pudo llegar, intentar de comprender no solamente que la estrategia empleada funciona, sino poder argumentar y explicar por qué realmente funciona, observar si se encuentra un camino más sencillo, observar hasta qué punto llega la estrategia, reflexionar un poco sobre las emociones y el propio proceso de pensamiento, y extraer conclusiones para futuras acciones.

La idea de utilizar estos métodos heurísticos generales es que el estudiante y también el docente cuente con un marco de referencia que les permita entender y resolver problemas en el proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática. En este sentido, los diferentes aspectos descritos y detallados anteriormente servirán de guía y orientación para afrontar el proceso de resolución de un problema; no obstante, en ningún momento se espera que los estudiantes los utilicen mecánica y rígidamente. Por esta razón, lo ideal es que se deben ajustar, discutir y aplicar de manera crítica y reflexiva teniendo en cuenta la clase de problemas que se planteen para resolverlos.

Finalmente, el autor de este trabajo académico, basado en los modelos de Polya, De Guzmán y Schoenfeld descritos líneas arriba, propone un método heurístico general de cuatro etapas con estrategias heurísticas más puntuales y prácticas en cada una de ellas, lo cual es de más fácil manejo para los estudiantes y docentes de educación secundaria al momento de enfrentarse a la actividad de resolución de problemas matemáticos. En la siguiente tabla se muestra el método heurístico con sus etapas y heurísticas específicas correspondientes.

Tabla 1

Método heurístico y estrategias heurísticas específicas para la resolución de problemas

ETAPAS	SUGERENCIAS Y ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS
Comprender el problema	• Explica de qué trata el problema. • Identifica los datos y la incógnita.
Buscar estrategias	• Elabora una representación gráfica del problema. • Formula y/o selecciona la estrategia a utilizar y plantea y/o indica los pasos a seguir. Las estrategias heurísticas son: - Ensayo y error - Elaborar un gráfico, un esquema, una tabla, … - Buscar patrones y regularidades - Particularización - Simulación y experimentación - Razonamiento progresivo - Razonamiento regresivo - Plantear una ecuación - Dividir el problema en partes - Realizar trazos auxiliares - Principio de movilidad - Aplicar una fórmula, una propiedad
Ejecutar las estrategias	• Realiza las operaciones matemáticas correspondientes. • Expresa el resultado mediante una oración.
Evaluar la solución	• Verifica el resultado obtenido. • Resuelve el problema de otras formas. • Explica y comunica el proceso seguido en la resolución del problema.

Nota: Elaborado a partir de los trabajos de Polya, Schoenfeld y De Guzmán (Torres, 2014).

2.2.2.2. Estrategias heurísticas específicas

Las estrategias heurísticas específicas para resolver problemas están referidas al conjunto de operaciones mentales que utilizan los resolutores para razonar sobre la forma de representar las metas y los datos, con el fin de transformarlos en procedimientos y así llegar a la obtención de la solución (Poggioli, 1999). En esta dirección, las estrategias de resolución de problemas se enseñan como un contenido, con aplicación en problemas de práctica, con la finalidad que dichas técnicas sean dominadas (Vilanova, s/f). De acuerdo con Pozo (1994) las estrategias heurísticas deben manejarse en relación estrecha con otros procesos cognitivos tales como: a) conocimiento de conceptos específicos; b) procesos básicos; c) técnicas, destrezas o algoritmos; d) estrategias de apoyo; y e) metaconocimiento.

Revisando la literatura especializada referente a la resolución de problemas, se identifica una extensa y probablemente incompleta lista de heurísticas específicas, sin embargo, en base a la experiencia del investigador y, basado en las propuestas de Polya (1965), Schoenfeld (1985, como se citó en Blanco, 1996 y Santos, 1997), Santos (1997), De Guzmán (1995, 2004) y Torres (2014), entre las más útiles podemos señalar a las siguientes: Ensayo y error; elaborar un gráfico, un esquema, una tabla, …; buscar patrones y regularidades; particularización; simulación y experimentación, razonamiento progresivo; razonamiento regresivo; plantear una ecuación; dividir el problema en partes; realizar trazos auxiliares; principio de movilidad y; aplicar una fórmula, una propiedad. En lo que resta del trabajo se describe e ilustra el proceso de cada heurística mediante la resolución de algunos problemas.

Ensayo y error

Consiste en hacer diferentes intentos para alcanzar la solución de un problema, siguiendo la siguiente secuencia de pasos: Elegir un valor posible para la incógnita, aplicar al valor posible las condiciones del problema y verificar si ha sido alcanzado el objetivo buscado. Este proceso se repite hasta encontrar la solución al problema matemático propuesto. A continuación de ilustra con un ejemplo.

Problema: En un evento deportivo las entradas de niños tienen un costo de 2 soles y la de adultos 4 soles. Si asistieron 35 personas y se recaudaron 92 soles. Determinar la cantidad de niños y adultos que ingresaron a dicho evento.

Resolución

Una sugerencia muy útil al utilizar la presente estrategia es comenzar asignado valores medios del total de elementos, en este caso, del total de personas. En función del resultado obtenido se aumenta o disminuye uno de dichos valores. Así:

- Se elige un valor posible cercano al medio: 18 niños y 17 adultos.
- Se aplica las condiciones del problema: Recaudación: 18(2) + 17(4) = 104 soles.
- Se prueba si se alcanzó el objetivo buscado: Se ha obtenido 104 soles y son solamente 92; por lo tanto, debemos disminuir el número de adultos. Volvemos a probar con otros valores hasta que se llega a determinar que se cumple para 24 niños y 11 adultos, así: 24(2) + 11(4) = 92 soles.

Hacer un gráfico, un esquema, una tabla, …

Son un gran número de problemas que se comportan de un modo muy transparente cuando se logra realizar una representación pertinente de los elementos que intervienen en ellos. En esta dirección, según De Guzmán (1995) se piensa y razona mejor con el soporte de imágenes que con el simple uso de números, símbolos o fórmulas. En el gráfico o el diagrama que se elabore del problema debe incorporarse de manera sencilla los más datos relevantes y eliminar los irrelevantes que puedan generar alguna confusión. De este modo se pueden resaltar visualmente las relaciones que se establecen entre los aspectos esenciales del problema y, a partir de allí, desprender las luces para clarificar la situación. Otras veces, la elaboración pertinente de un esquema contiene el propio camino de la solución. Ver el siguiente ejemplo.

Problema: Un granjero cría gallinas y conejos en su corral, si en total se cuentan 23 animales y 76 patas. Hallar la cantidad de animales de cada clase que existen.

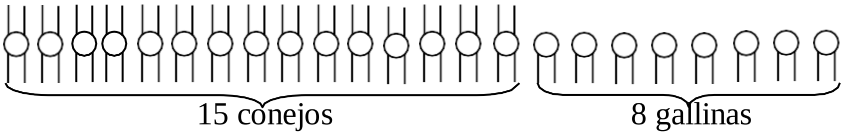
Resolución

Representamos cada animal con un redondito y cada pata del animal con un palito. Luego, se procede de la siguiente manera:

- Primero repartimos 2 patas a cada uno de los 23 animales.

Como son 23 animales, se repartió: 23(2) = 46 patas.

- Como hay 76 patas y solamente se hay repartido 46, entonces, sobran 30 patas, por lo que, se reparte 2 más a cada uno hasta donde se termine las 30 patas que aún se tiene.



Es notable que las 30 patas alcanzaron para dar 2 patas más a 15 animales. En tal sentido, todos aquellos que han recibido 4 patas serán conejos y los que obtuvieron sólo 2 patas serán las gallinas.

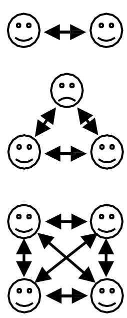
Por lo tanto, en la granja hay 15 conejos y 8 gallinas.

Razonamiento inductivo

Consiste en explorar casos particulares que nos permiten obtener patrones o regularidades para luego llegar a la solución general del problema. En seguida se presenta un ejemplo de cómo aplicar la presente estrategia. Cómo mínimo se debe analizar tres casos, para a partir de ello descubrir el patrón o regularidad que conlleve a obtener la respuesta.

Problema: A una reunión con motivo de celebrar el cumpleaños de un amigo, asistieron un total de 60 personas. En dicha reunión todos los asistentes se saludan dándose la mano. Determinar la cantidad de saludos de mano que se produjeron.

Resolución



Para 2 personas $\Rightarrow N°saludos = 1 = \frac{1x2}{2}$

Para 3 personas: $\Rightarrow N°saludos = 3 = \frac{2x3}{2}$

Para 4 personas: $\Rightarrow N°saludos = 6 = \frac{3x4}{2}$

Por lo tanto, para 60 personas: $N°saludos = \frac{59x60}{2} = 1170$

Particularización

Consiste en probar con valores particulares pertinentes con la finalidad de familiarizarse con el problema y luego en base a ello determinar su solución. A continuación, se ilustra dicha estrategia mediante la resolución de un problema.

Problema: Un comerciante de electrodomésticos con el fin de obtener una margen de ganancia aumentó en 30% el precio de costo de un televisor para venderlo. Pero al momento que lo vende hace un descuento del 20% para que lo puedan comprar. ¿Cuál fue su porcentaje de ganancia?
Resolución

- Sea el precio de compra: 100 <>100% (valor particular pertinente).
- Luego, el precio fijado será: 100 + 30% (100) = 100 + 30 = 130 <> 130%.
- En consecuencia, el precio de venta es: 130 - 20% (130) = 130 - 26 = 104 <> 104%.

Por lo tanto, comparando el precio fijado y el precio de venta, se tiene que la ganancia es: 104% - 100% = 4%.

Simulación y experimentación

Consiste en utilizar objetos concretos reales o simulados que representen a los elementos del problema y luego, realizando las condiciones indicadas en el problema llegara a la solución. Ver el siguiente ejemplo.

Problema: Tres hombres comieron en un restaurante pagando cada uno S/.10 al mozo. Al momento de entregar el dinero al dueño, éste le dijo que la cuenta sólo era de S/.25, en consecuencia, le dio S/.5 para que fuera a devolverlos. En el trayecto el mozo se dio cuenta que era difícil repartir S/.5 entre los tres, por lo que se cogió S/. 2 y devolvió un sol a cada uno, de esta manera cada uno pagó S/.9. Ahora S/.9 por 3 son S/.27 más S/.2

que se cogió el mozo son S/.29, pero en un inicio había S/.30. ¿Dónde está el otro sol?

Resolución

Simulamos el proceso de pago y de entrega de vuelto con la participación de cuatro personas: el mozo y los tres consumidores. Luego empezamos a experimentar entre ellas todas las condiciones que indica el problema, llegando a determinar que el mozo devuelve 3 soles, esto es, un sol a cada uno, por tanto, cada consumidor pagó 9 soles y entre los tres cancelaron 27 soles. En consecuencia, 27 soles que pagaron y 3 soles que llevaron de vuelto, allí están los 30 soles que había al inicio. También se puede notar que: 25 que quiso cobrar, más 2 con que se quedó y más 3 que devolvió, suman los 30 soles.

Razonamiento progresivo

Es cuando las relaciones se establecen apoyándose en situaciones o datos iniciales del problema para así llegar a situaciones o resultados finales. Es decir, va del inicio al final. Se puede apoyar en gráficos y esquemas. En seguida se ilustra con un ejemplo.

Problema: Al dejar caer una pelota desde cierta altura, se observa que cada vez que rebota se eleva 2/3 de la altura anterior. ¿Cuál es la altura que alcanza después del tercer rebote; si se dejó caer de 81 m de altura?

Resolución

- Primer rebote : $Altura = \frac{2}{3}(81m) = 54m$
- Segundo rebote:

$$Altura = \frac{2}{3}(54m) = 36m$$

- Tercer rebote : $Altura = \frac{2}{3}(36m) = 24m$

Por lo tanto, después del tercer rebote, la pelota alcanza 24 m de altura.

Razonamiento regresivo

Se emplea generalmente en problemas en donde se tiene información de la situación final, y en base a ella se llega a determinar la situación inicial. Es decir, va del final a lo inicial. Consiste, por lo tanto, en suponer el problema resuelto y se retrocede siguiendo de inversa los pasos del enunciado del problema. Se presenta el siguiente ejemplo.

Problema: Un niño vende sus lapiceros en tres días. El primer día vende la mitad de los lapiceros que tiene, el segundo día vende la tercera parte de los lapiceros que le quedan y el tercer día vende los 20 lapiceros restantes. ¿Cuántos lapiceros tenía el niño para vender?

Resolución

Empezando por el final, es decir, del último al primer día:

- Tercer día: Vendió los 20 lapiceros que se quedaron, por lo tanto, antes del tercer día tenía 20 lapiceros.
- Segundo día: Si luego de vender 1/3 de los lapiceros se queda con 20, entonces, estos 20 equivale a 2/3 de los lapiceros que tenía, por lo tanto, antes de vender tenía 30 lapiceros (2 de 3 partes equivale a 20, entonces cada parte vale 10, en consecuencia 3 partes equivale a 30).
- Primer día: Si luego de vender ½ o la mitad de los lapiceros se quedó con 30, entonces estos 30 equivalen al otro ½ o mitad que le quedan, por tanto, al inicio tenía 60 lapiceros (Es decir, 1 de 2 partes equivalen a 30, eso indica que 2 partes valen 60).

Por lo tanto, Luis tenía al inicio 48 lapiceros para vender.

Plantear una ecuación

Plantear una ecuación significa traducir un enunciado del lenguaje verbal, familiar o cotidiano al lenguaje matemático que es la ecuación. Los pasos son: Leer el problema comprensivamente, identificar datos e incógnitas, plantear la ecuación relacionando datos e incógnitas según la condición, resolver la ecuación e interpretar el resultado. Ver el ejemplo siguiente.

Problema: Un gavilán se cruza en vuelo con un aparente centenar de palomas. Pero una de ellas se percata del posible error y expresa: "No somos cien – le dice – Nosotras, más nosotras, más la mitad de nosotras, más la cuarta parte de nosotras, más usted señor gavilán, somos cien". Hallar del número de palomas que hay en la bandada.

Resolución

- Después de leer comprensivamente el problema, se tiene:

  Incógnita: El número de palomas de la bandada: x

  Datos: Cantidad parcial de palomas.

Lenguaje cotidiano	Lenguaje algebraico
Nosotras	x
Más nosotras	x
Más la mitad de nosotras	x/2
Más la cuarta parte de nosotras	x/4
Más usted señor gavilán	1
Somos cien	100

- Se plantea la ecuación: La suma de cantidades parciales de palomas más el gavilán debe ser igual a 100. Así:

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100$$

- Resolviendo la ecuación resulta: x = 36.

- Interpretación. En la bandada había 36 palomas.

Dividir el problema en partes

Consiste en dividir el problema propuesto en submetas, en problemas más simples. Estos casos más sencillos sirven para enfrentar el problema por partes. Luego, al juntar las soluciones parciales como un todo se llegará a alcanzar la solución del problema. El siguiente ejemplo ilustra lo dicho.

Problema: Un comerciante de ganado compra una oveja por 70 soles y la vende por 80 soles, luego decide recuperarla por lo que la vuelve a comprar por 90 soles, finalmente se deshace de ella vendiéndola por 100 soles. Gana o pierde, ¿cuánto?

Resolución

Para resolver este problema, se establecen las siguientes submétases:

- Primera sub meta: En la primera compra-venta se tiene: Compra a 70 y vende a 80 soles, entonces, gana 10 soles.

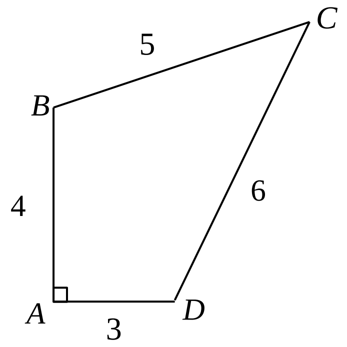
- Segunda sub meta: En la segunda compra-venta, se tiene: Compra a 90 y vende a 100 soles, en consecuencia, gana 10 soles.

  Por lo tanto, gana 10 + 10 = 20 soles.

Realizar trazos auxiliares

Consiste en graficar líneas ya sean verticales, horizontales, diagonales, mediatrices, etc, con el fin de completar la figura o particionar la misma en figuras conocidas, buscar una simetría; con el fin de establecer relaciones que nos permita avanzar a la solución del problema. El siguiente ejemplo muestra su aplicación.

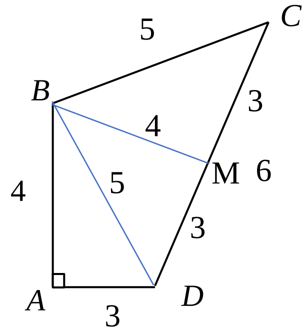
Problema: Un agricultor sembró verduras en tiene un terreno de la forma y medidas que indica el cuadrilátero ABCD. Determinar el área de dicho terreno, sabiendo que sus medidas están expresadas en metros.



Resolución

Se realiza un trazo auxiliar que una los puntos B y D, quedando la figura dividida en dos triángulos: El triángulo rectángulo BAD y el triángulo isósceles DBC. Luego, en este último triángulo se traza la mediana BM, con lo cual se obtiene los triángulos rectángulos BDM y BMC.

Así:



En el triángulo rectángulo BAD,y BDM al aplicar el Teorema de Pitágoras se tiene que: BD = 5m y DM = 4m.

Calculando el área de cada triángulo formado se tiene:

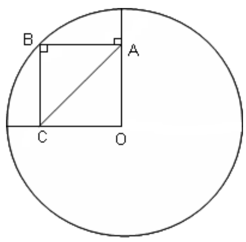
- Área del triángulo rectángulo BAD = $\frac{3(4)}{2} = 6m^2$.
- Área del triángulo isósceles DBC = $\frac{6(4)}{2} = 12m^2$.

Por tanto, el área del terreno mide 6 + 12 = 18 m^2.

Principio de movilidad

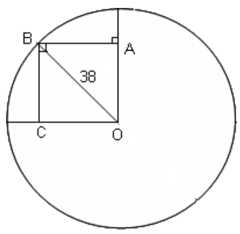
Consiste en considerar que, en figuras geométricas, un elemento dado se puede desplazar de un lugar a otro o cambiar de posición. Luego, a partir de ello, debe analizarse los cambios y resultados que se generan durante ese movimiento, con el objeto de encontrar relaciones y formular las suposiciones correspondientes. Ver el siguiente ejemplo.

Problema: El diámetro del círculo de centro O es 38 cm. Calcule la longitud de AC.



Resolución

Muchos intentan resolver este problema aplicando el teorema de Pitágoras debido a que su pensamiento se muestra estático. Sin embargo, utilizando el principio de movilidad, nos damos cuenta que AC = OB, ya que ambos son diagonales del rectángulo ABCD. Ahora como el diámetro del círculo es 38 cm, entonces BO que es radio mide 19 cm.



Por lo tanto, como AC=OB, entonces, AC=19cm.

Aplicar una fórmula, una propiedad

Consiste en utilizar alguna relación matemática que pude ser una fórmula, una propiedad, o algoritmo que permita resolver el problema. Cuando se utiliza esta estrategia se está poniendo en práctica el razonamiento deductivo, que consiste en utilizar reglas generales previamente probadas a casos particulares. El siguiente ejemplo muestra cómo se utiliza la presente estrategia.

Problema: José compra una tableta en cuotas y conviene pagar semanalmente de la siguiente manera: la primera semana cancela 1 sol, la segunda 3 soles, la tercera 5 soles y así sucesivamente durante 30 semanas. Determinar el precio de la tableta.

Resolución

El precio (P) de la tableta será: P= 1+3+5+7+…. (30 términos).

Por fórmula se conoce que: $1+3+5+7+\ldots+(2n-1) = n^2$

Para n = 30, se tiene que: $P = 1+3+5+7+\ldots$ (30 términos) $= 30^2 = 900$.

Por lo tanto, el precio del de la tableta es 900 soles.

En realidad, son pocos los problemas que se resuelven aplicando sólo una estrategia, generalmente se requiere utilizar la combinación de dos o más estrategias, lo que sucede en la práctica es que una de ellas es más evidente que la otra al momento de resolver un problema. Además, no solamente se requiere que el estudiante conozca diferentes estrategias heurísticas, sino que, además, es necesario que lo sepa utilizar de manera creativa, crítica y reflexiva en diferentes situaciones a las que se enfrente.

2.2.3. La enseñanza de estrategias de resolución de problemas

No cabe duda en señalar que, el único modo de aprender a resolver problemas, es solamente resolviendo problemas, es decir, sumergiéndose en una práctica constante de resolver problemas. Puesto que, al igual que un deportista debe dedicar muchas horas a su entrenamiento para perfeccionar su capacidad en una determinada disciplina, quien desee llegar a ser hábil en la resolución de problemas debe invertir suficiente tiempo a esta actividad. Es decir, la práctica constante es fundamental para alcanzar mejores niveles de desempeño en cualquier quehacer, en este caso, en el campo de la resolución de problemas matemáticos. Por otra parte, como bien lo señalan Pifarré y Sanuy (2001), un buen resolutor de problemas se caracteriza por el manejo de un conjunto de estrategias heurísticas generales y específicas que orientan su accionar y le permiten superar las dificultades que va experimentando en el proceso de resolución. En este sentido, el dominio de un conjunto de estrategias heurísticas es lo que diferencia a un resolutor experto de uno novato. Lógicamente, aquel alumno que está mejor equipado con estrategias heurísticas generales y específicas, será el que tiene mayor posibilidad de salir airoso y triunfante de la compleja pero fascinante tarea de resolver problemas. De allí que, la preocupación y el desafío de todo profesor de matemática es en cómo convertir a un novato en un experto resolutor de problemas. Tal vez, la respuesta casi cantada será: empoderándolo en el manejo de heurísticas. Por lo tanto, el trabajo central del docente será en cómo transferir las estrategias que en un principio están en la cabeza del profesor o en la de un alumno más capaz hasta la cabeza del estudiante. Es decir, cómo enseñar las estrategias de resolución de problemas a los alumnos. Conseguir esto, es hallar la llave de oro para formar alumnos matemáticamente competentes o lo que es lo mismo, competentes para resolver problemas.

Desde esta perspectiva, el buen manejo de estrategias heurísticas tanto generales como específicas por parte de los estudiantes depende de un eficiente dominio y de una buena enseñanza de dichas estrategias por parte del docente. A este respecto, se asume la postura de muchos autores que como resultado de sus investigaciones sostienen que el proceso de resolución de problemas como cualquier deporte es una actividad entrenable. Es decir, se enseña y se aprende los heurísticos para resolver problemas (Schoenfeld, 1989, como se citó en Juidías y Rodríguez, 2007; Pozo, 1994; Algarabel, et al., 1996; Poggioli, 1999; Monereo, 2000; Perales, 2000; Pifarré et al., 2001; Juidías y Rodríguez, 2007). Nadie nace sabiéndolo, se domina a medida que se practica. Según Algarabel et al. (1996) en un estudio realizado, sostienen que el entrenamiento en el manejo de heurísticos específicos es un procedimiento de gran utilidad para mejorar el rendimiento en la resolución de problemas matemáticos. Así mismo, Juidías y Rodríguez (2007) indican que, para reducir las dificultades en la resolución de problemas, el entrenamiento en heurísticos mediante el modelado y el pensamiento en voz alta, posibilita ceder de manera progresiva la responsabilidad sobre el control de la tarea del profesor a los estudiantes, pasando por una etapa intermedia de resolución colaborativa del problema planteado.

Para explicar con mayor detalle la pertinencia del entrenamiento en heurísticos, se retoma la analogía entre un deporte (este caso el fútbol) y la resolución de problemas. En el fútbol, por ejemplo, el director técnico entrena a los jugadores para manejar de manera eficiente las técnicas y estrategias a emplear en un próximo encuentro. Mientras más practican, más dominio adquirirán de ellas y, por lo tanto, mejores jugadores resultarán. Los entrenan para jugar fútbol. Ningún futbolista puede entrar a jugar un partido profesional sin dominar las técnicas y estrategias de juego, eso sería, condenarlo a una derrota segura. Igualmente, sucede en la resolución de problemas. Es una actividad para actores, más no para espectadores. Mientras más problemas se resuelvan, más expertos se volverán los resolutores.

Pero para lograr tal expertiz, es necesario que los resolutores al igual que los futbolistas deben ser entrenados por el docente en el manejo de técnicas y estrategias heurísticas que les permita salir victoriosos a la hora de enfrentarse a situaciones problemáticas. Enfrentarlo a los alumnos a la resolución de problemas de manera ciega sin contar con los recursos heurísticos, es conducirlo directamente al fracaso. Pero, desafortunadamente, eso es lo que está pasando en la actual educación matemática escolar. Se desarrolla muchos ejercicios en la clase de matemática, pero se propone problemas y problemas a los estudiantes para que lo resuelvan sin haberles enseñado cómo se resuelve y peor sin haberles arropado con las herramientas del pensamiento que son las heurísticas. Aún más, se está enviando a los estudiantes a enfrentarse a los exámenes estandarizados (por ejemplo, ECE y PISA) sin las herramientas heurísticas necesarias para resolverlos, de ahí los pobres resultados obtenidos. No se puede formar alumnos hábiles en la resolución de problemas con una enseñanza que predica y practica una enseñanza basada en el desarrollo de ejercicios mecánicos mediante la aplicación de fórmulas y algoritmos. Por eso, hay la imperiosa necesidad que los estudiantes aprendan estrategias para resolver problemas.

Sentada la posición de que los heurísticos tanto generales como específicos son objetos de enseñanza y aprendizaje, queda ver ahora cómo se debe desarrollar e implementar en el seno del salón de clase este proceso instructivo, conocido también como instrucción heurística, que se entiende como la enseñanza sistemática y consciente de las estrategias heurísticas útiles para la resolución de problemas. De manera general, hay un consenso importante en sostener que enseñar estrategias heurísticas consiste en transferir de manera progresiva el control de la estrategia heurística que en un primer momento tiene de manera absoluta el profesor, al alumno para que se apropie comprensivamente de ella y así pueda utilizarlo de manera reflexiva y creativa en diferentes problemas. Existen diversas propuestas sobre cómo se debe enseñar las estrategias heurísticas, sin embargo, se ha tomado aquellas que han resultado de mayor pertinencia para el presente trabajo. A continuación, se detallan tres de ellas.

Para Schoenfeld (1980, como se citó en Juidías y Rodríguez, 2007), el proceso de enseñanza y aprendizaje de las estrategias heurísticas para resolver problemas transita de la siguiente manera: 1) El docente hace el modelamiento de la forma de usar la estrategia heurística aplicándola a un problema matemático específico. 2) El profesor genera una discusión amplia con los estudiantes sobre la puesta en práctica de las heurísticas. 3) Los estudiantes, trabajando en equipos emprenden la tarea de aplicación de las heurísticas bajo el acompañamiento atento del docente que, cuando es necesario, les brinda la retroalimentación oportuna y adecuada. Para estimular la reflexión sobre el proceso de resolución de problemas matemáticos, el profesor debe plantear al estudiante interrogantes como, por ejemplo: ¿qué estás haciendo? ¿por qué estás haciendo eso?, ¿cómo te ayuda lo que estás haciendo para alcanzar la solución? 4) Con la práctica los estudiantes interiorizan estas preguntas hasta llegar a plantearlas de forma espontánea. A partir de lo dicho, se afirma que el aprendizaje de las estrategias tanto generales como específicas para la resolución de problemas requiere de una enseñanza planificada y consciente que incluya modelamiento, discusión, acompañamiento, reflexión, práctica, trabajo colaborativo y retroalimentación pertinente.

Otra propuesta instruccional es la que plantea Pozo (1990), quien postula que la enseñanza de estrategias para resolver problemas recorre por cuatros fases secuenciales: Novato, dominio técnico, dominio estratégico y experto. La fase de novato, se da cando el alumno no es capaz de utilizar por sí mismo o con ayuda de otro, las estrategias heurísticas para resolver un problema. La fase de dominio técnico, comprende el entrenamiento del alumno en el uso de las heurísticas, cuyo dominio está sujeto a la ayuda externa, ya que no es capaz de aplicarlo por sí mismo en una tarea abierta, sino que necesita la guía del docente. La fase del dominio estratégico, tiene que ver con el enfrentamiento del resolutor a tareas más abiertas que demandan reflexión y toma de decisiones autónomas que le permitirán asumir el control de su propio proceso de resolución de problemas, sin necesidad de ayuda externa. Además, puede adoptar diversas estrategias para enfrentase a diferentes tipos de problemas. Por último, la fase de experto, es aquella en donde por propia práctica del resolutor, el manejo de las estrategias heurísticas generales y específicas se vuelve automáticas, convirtiéndose en soporte de nuevos aprendizajes al enfrentarse a otras situaciones. Por consiguiente, se asume que, mediante una enseñanza eficaz y progresiva de las estrategias heurísticas por parte del docente, permitirá al estudiante pasar de novato a experto como resolutor de problemas.

Por su parte, Poggioli (1999) aporta tres modelos instruccionales para la resolución de problemas: instrucción directa, autoinstrucción y ejecución guiada. La instrucción directa consiste en enseñar o modelar paso a paso la utilización de una estrategia en el contexto de la resolución de un problema matemático. A partir de ello, el apoyo docente se disminuye en forma gradual, y mediante una práctica y control permanente se va afianzado las estrategias entrenadas. Las estrategias autoinstruccionales se concretan cuando se brindan a los estudiantes un conjunto de ayudas verbales en calidad de mediadores de los procesos cognitivos y metacogntivos con la finalidad de conducirles a adquirir los pasos correspondientes para hallar la solución del problema. La práctica guiada inculca a los alumnos a adquirir de forma progresiva y eficiente las habilidades cognoscitivas y metacognitivas útiles en la resolución de problemas. Sus pasos son: a) Modelamiento de la resolución del problema por parte del profesor, b) Utilización de heurísticos propios de una ejecución experta y, c) Retroalimentación de la ejecución de los alumnos con el propósito de que alcancen tal nivel de experticia. Según la autora señala lo que se busca realmente es formar un estudiante estratégico que: posea un conjunto amplio y diverso de heurísticos que lo pueda aplicar en cualquier situación; aplique con flexibilidad los heurísticos en tareas específicas; y, realice acciones de control del proceso de resolución de problemas para así ver si los procedimientos utilizados conducen a la solución esperada. En suma, hay distintas formas de enseñar a resolver problemas, pero todas tienen como común denominador en hacer notar que el éxito en la resolución de problemas radica en lograr que el alumno se empodere en el manejo de diferentes estrategias heurísticas.

A partir de los aportes estudiados se llega a las siguientes conclusiones. El manejo de las estrategias heurísticas generales y heurísticas por parte del estudiante se constituye en una tarea impostergable de la enseñanza-aprendizaje de la Matemática y en una de las herramientas fundamentales para formar alumnos competentes en la resolución de problemas. El eficiente dominio de dichas estrategias se adquiere mediante una práctica constante en una gran variedad de situaciones-problemas complejas y retadoras que generen motivación y emoción en los resolutores. El contar con un buen repertorio de estrategias heurísticas posibilita a los estudiantes a actuar con mayor eficiencia y autonomía ante una tarea de resolución de problemas.

En concordancia con lo anterior, el autor del presente trabajo considera que, para formar estudiantes competentes en la resolución de problemas matemáticos, se les debe entrenar en dicha tarea hasta que adquieran experticia estratégica, para tal fin, el proceso de enseñanza-aprendizaje de las estrategias heurísticas debe discurrir de manera comprensiva y reflexiva por tres fases secuenciales. La primera fase es la enseñanza directa de la estrategia, que consiste cuando el profesor explica y modela la estrategia heurística, mostrando paso a paso su aplicación en la resolución de uno o más problemas cuidadosamente seleccionados. En suma, en esta etapa, el docente resuelve el problema con la atención y participación de los estudiantes. La segunda fase constituye el aprendizaje guiado de la estrategia, en este caso los alumnos ya sea de manera individual o cooperativa toman la iniciativa por sí mismos de aplicar la estrategia heurística en la resolución de problemas, pero siempre con la guía, apoyo y acompañamiento del docente mediante preguntas orientadoras. En esta etapa, los alumnos resuelven el problema con la orientación del profesor. Por último, la tercera fase es la práctica autónoma de la estrategia, en donde el estudiante aplica por sí mismo y de manera crítica, creativa y reflexiva la estrategia heurística estudiada en diferentes situaciones problemáticas. Es decir, el estudiante resuelve problemas sin ayuda del docente, pero sí con su mirada atenta; demostrando así su dominio estratégico y autónomo de la heurística. Estas tres fases deben implementarse de manera consecutiva, tratando de conseguir a cada momento que el estudiante entienda por qué, cómo y cuándo utilizar tal o cual estrategia ante un problema plateado. Solamente así se logrará resolutores estratégicos, caso contrario se seguirá formando alumnos mecánicos en el manejo de estrategias, sin llegar a comprender su utilidad y funcionamiento.

III. METODOLOGÍA

El presente trabajo académico está basado en la investigación bibliográfica o documental, por cuanto se ha realizado una revisión de diferentes fuentes escritas publicadas sobre resolución de problemas matemáticos y sus correspondientes estrategias heurísticas. Según Bernal (2010), la investigación documental implica analizar la información escrita respecto a un tema específico, cuyo objetivo es determinar la relación, las diferencias, las etapas, la postura o situación actual del conocimiento referente al tema objeto de estudio; en el caso del presente trabajo, son las estrategias heurísticas generales y específicas para resolver problemas matemáticos.

La investigación documental en palabras de Rodríguez (2011) consiste en ubicar, revisar y analizar información de documentos publicados u afines, con el propósito de hacer una recopilación de datos que permitan la construcción de las bases teóricas y antecedentes respecto a un tema, incluyendo los métodos, técnicas y procedimientos utilizados. Por su parte Arias (2012) sostiene que la investigación documental es un proceso que se basa en la búsqueda, la recuperación, el análisis, la crítica y la interpretación de la información obtenida por otros investigadores en medios impresos, audiovisuales o electrónicos.

3.1. Métodos

Para el desarrollo de este trabajo se aplicó el método descriptivo, toda vez que se trató de determinar las características de las diferentes estrategias heurísticas a emplearse en la resolución de problemas matemáticos. En esta dirección, Sánchez y Reyes (1998) sostienen que el método descriptivo se ocupa de la descripción, del análisis y la interpretación sistemática de una serie de hechos relacionados a las variables de estudio en su estado actual.

También se utilizó el método analítico-sintético, el mismo que permitió analizar la información recogida de las diferentes fuentes consultadas para construir el marco teórico y luego mediante la aplicación de la síntesis elaborar las conclusiones correspondientes. El método analítico-sintético según Méndez (2011), consiste en que primero mediante el análisis se descompone el todo en cada una de sus partes y las caracterizar, luego, mediante la síntesis establece relaciones entre los elementos del objeto de estudio con el fin de construir explicaciones.

3.2. Técnicas

La técnica utilizada para la elaboración del presente trabajo académico es el análisis documental, la cual ha permitido recolectar, analizar y sistematizar información de un conjunto de documentos escritos relacionados a las estrategias heurísticas para resolver problemas de matemáticas en educación secundaria. Al respecto, Bernal (2010) indica que el análisis de documentos es una técnica basada en fichas bibliográficas con el objetivo de hacer un análisis del material impreso para elaborar el marco teórico del trabajo de investigación.

El análisis documental se operativizó mediante la identificación y elección pertinente de diferentes libros, tesis y artículos científicos tanto impresos como electrónicos que cumplieron los dos siguientes criterios de selección. El primer criterio fue analizar libros que contienen planteamientos teóricos de destacados investigadores relacionados con el objeto de estudio del presente trabajo, esto es, que brinden información que fundamenten sobre la resolución de problemas y sobre todo lo referente a las estrategias heurísticas generales y específicas para resolver problemas, así como lo concerniente a la enseñanza-aprendizaje de dichas estrategias. Un segundo criterio de selección consideró que los antecedentes de investigación ya sean tesis o artículos científicos sean de los últimos cinco años y que traten sobre la influencia que ejerce la aplicación de estrategias heurísticas en fortalecimiento de la capacidad de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de educación secundaria preferencialmente.

3.3. Instrumentos

Para el trabajo realizado se ha utilizado como instrumento de investigación las fichas de resumen, las mismas que han servido para el registro y sistematización de la información obtenida de diferentes fuentes sobre el objeto de estudio. Según Jurado (2005), la ficha de resumen sirve al investigador para elaborar un sumario o recapitulación de la información analizada.

CONCLUSIONES TEÓRICAS

Teniendo en cuenta el objetivo general que consiste en identificar las estrategias heurísticas que contribuyan a la resolución de problemas matemáticos en educación secundaria, se concluye que las estrategias heurísticas se refieren a la secuencia de acciones u operaciones cognitivas que utilizadas de manera comprensiva, reflexiva y creativa posibilitan a los estudiantes de educación secundaria a tener mayor éxito en la resolución de problemas matemáticos. Así mismo, las estrategias heurísticas pueden ser de dos tipos: las heurísticas generales y las heurísticas específicas, no obstante, a pesar de esta diferenciación, en la práctica ambas se interrelacionan y actúan de manera articulada. El manejo de ambos tipos de estrategias mejora la habilidad de los estudiantes para resolver problemas.

En relación al primer objetivo específico que está referido a describir el método heurístico general del proceso de resolución de problemas matemáticos en educación secundaria, se concluye que las estrategias heurísticas generales para conducir el proceso de resolución de problemas están conformadas por los métodos heurísticos estructurados por fases o etapas que conllevan a la realización de un conjunto de acciones secuenciales. Existen diversos modelos de estrategias heurísticas generales para resolver problemas, no obstante, hay un consenso en señalar que el proceso de resolución de problemas avanza por cuatro etapas que son: comprender el problema, buscar estrategias, ejecutar las estrategias y evaluar la solución. Cada una de estas etapas están acompañadas de sugerencias, preguntas y estrategias heurísticas más específicas que permiten su operativización.

En lo que respecta al segundo objetivo específico que tiene que ver con describir el procedimiento de las diferentes estrategias heurísticas específicas útiles en la resolución de problemas matemáticos en educación secundaria, se concluye que las estrategias heurísticas específicas se constituyen en las grandes herramientas del pensamiento para enfrentarse a situaciones problemáticas. La apropiación de los procedimientos de los heurísticos específicos por parte de los estudiantes debe darse en el contexto mismo de la resolución de problemas. El manejo sistemático, crítico y creativo de las estrategias heurísticas específicas, permiten al alumno tener mayores posibilidades para resolver problemas de diferentes formas y de manera autónoma. Entre estas estrategias destacan: Ensayo y error; elaborar un gráfico, un esquema, una tabla, …; buscar patrones y regularidades; particularización; simulación y experimentación; razonamiento progresivo; razonamiento regresivo; plantear una ecuación; dividir el problema en partes; realizar trazos auxiliares; principio de movilidad y aplicar una fórmula o una propiedad.

Referente al tercer objetivo específico que está relacionado a describir el proceso de enseñanza-aprendizaje de las estrategias heurísticas para resolver problemas matemáticos en educación secundaria, se concluye que la resolución de problemas es una actividad que cuando más se práctica, más se domina. En tal sentido, el manejo de las estrategias heurísticas son entrenables, es decir, se pueden enseñar y aprender. Por consiguiente, la enseñanza-aprendizaje de los heurísticos generales y específicos debe ser un acto planificado e intencional que recorra por las siguientes fases: enseñanza directa de la estrategia, aprendizaje guiado de la estrategia y práctica autónoma la estrategia. El empoderamiento gradual del estudiante en estrategias heurística le permite convertirse de un resolutor novato a un resolutor estratégico y experto.

Finalmente, dada la importancia y el papel que juega las estrategias heurísticas tanto generales como específicas en el proceso de resolución de problemas, se sugiere a docentes y administradores de la educación de las diferentes instancias de gestión a seguir profundizando su estudio ampliándolo a las demás etapas, niveles y modalidades del sistema educativo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arias, F. (2012). *El proyecto de investigación. Introducción a la metodología científica.* Epistme.

Bernal, C.A. (2010). *Metodología de la investigación.* Pearson.

Blanco, J.L. (1996). La resolución de problemas. Una revisión teórica. *Revista Suma, 21*, 11-20.

Carruitero, C. P. y Oseda, D. (2021). Estrategias heurísticas en el desarrollo de competencias matemáticas en la institución educativa N° 80127 Huamachuco -2020. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 5*(4), 5033-5049.

Castillo, M.S. (2022). Taller de estrategias heurísticas para resolver problemas de cantidad en estudiantes de primaria, Usquil-Otuzco, 2022. *LATAM Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales y Humanidades, 3*(2), 1053-1070.

De Guzmán, M. (1995). *Para pensar mejor: Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos.* Pirámide.

De Guzmán, M. (2004). *Aventuras matemáticas*. Pirámide.

De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación, 43*, 19-58.

Domínguez, L.E. y Espinoza, B.I. (2019). *Potenciar la resolución de problemas matemáticos desarrollando habilidades del pensamiento desde una mirada heurística.* (Tesis de Maestría). Universidad de la Costa. Colombia.

Espinoza, J.A. (2018). *El programa estrategias heurísticas en la resolución de problemas matemáticas en estudiantes del 2do grado de primaria de la I.E. 1025 El Augustino 2016* (Tesis de Maestría). Universidad César Vallejo. Lima – Perú.

Fernández, A.R. (2020). *Estrategias heurísticas para desarrollar la capacidad de resolución de problemas matemáticos en estudiantes del Instituto Superior Pedagógico Público Víctor Andrés Belaunde de Jaén – Cajamarca.* (Tesis de Maestría). Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo. Lambayeque – Perú.

Ferreira, N. y Lorenzo, M. (2013). *Una invitación de la resolución de problemas.* UNLPam.

Figueroa, E. (2006). Estrategias en la resolución de problemas matemáticos. *Revista Educare, 10*(1), 1-10.

Foong, P.Y. (2013). Resolución de problemas en matemática. En L.P. Yee (Ed.). *La enseñanza de la matemática en la educación básica* (pp.65-91). Academia Chilena de la Ciencia.

Fridman, L.M. (1995). *Metodología para resolver problemas de matemáticas.* Iberoamericana.

García, J.A. (2001). *La didáctica de la matemática: Una visión general*. http://nti.educa.rcanaria.es/rtee/didmat.htm.

Gutiérrez, S.M. (2018). *Resultados del método de Polya en el desarrollo de habilidades matemáticas de alumnos del 2° ciclo del centro regional de educación – Concepción* (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Concepción. Concepción – Paraguay.

Juidías, J. y Rodríguez, I.R. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación,* 342, 257-286.

Jurado, Y. (2005). *Técnicas de investigación documental*. Thomson.

Mazario, I. (2009). *Reflexiones sobre un tema problémico: la resolución de problema*s. Universitaria.

Medina, V.H. y Pérez, M.A. (2021). Influencia de las estrategias heurísticas en el aprendizaje de la matemática. *Innova Research Journal, 6*(2), 36-61.

Méndez. C.E. (2011). *Metodología. Diseño y desarrollo del proceso de investigación con énfasis en ciencias empresariales.* Limusa.

Mendoza, L. (2018). Estrategias heurísticas para incrementar la capacidad de resolución de problemas en estudiantes de educación secundaria. *Sciéndo, 21*(2), 205-211.

Ministerio de Educación. (2006). *Propuesta pedagógica para el desarrollo de las capacidades matemáticas.* Corporación Gráfica Navarrete.

Ministerio de Educación. (2007). *Orientación para el trabajo pedagógico del área de Matemática*. Empresa Editora el Comercio.

Ministerio de Educación. (2018). *Evaluación PISA 2018.* http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2019/12/PISA-2018-Resultados.pdf

Ministerio de Educación. (2019). *Evaluación de logros de aprendizaje*. http://umc.minedu.gob.pe/wp-ontent/uploads/2020/06/Resultados2019_DRECajamarca.pdf

Ministerio de Educación. (2023). *¿Qué aprendizajes logran nuestros estudiantes? Evaluación Muestral de Estudiantes 2022.* *https://repositorio.minedu.gob.pe/bitstream/handle/20.500.12799/9139/Qu%c3%a9%20aprendizajes%20logran%20nuestros%20estudiantes%20Evaluaci%c3%b3n%20Muestral%20de%20Estudiantes%202022.%20Resultados%20de%20la%20evaluaci*

%c3%b3n%20nacional%20de%20logros%20de%20aprendizaje.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Nacional Council of Teachers of Mathematics. (1974). *Sugerencias para resolver problemas*. Trillas.

Nacional Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. SAEM THALES.

Ojeda, A.J., Ozuna, D., Castaño, E. y Castro, J.J. (2021). *Estrategia heurística de Polya con mediación de Moodle para el fortalecimiento de la competencia de resolución de problemas en contextos numérico y geométricos*. (Tesis de Maestría). Universidad de Cartagena. Colombia.

Patiño, K.N., Prada, R. y Hernández, C.A. (2021). La resolución de problemas matemáticos y los factores que intervienen en su enseñanza y aprendizaje. *Revista Boletín REDIPE, 10*(9), 459-471.

Peña, D.E. y Rojas, C. (2019). Aplicación del método heurístico en la resolución de problemas matemáticos en el segundo año de la educación media del Colegio Nacional Agustín F. de Pinedo, Año 2017. *Revista de Ingeniería, Ciencia y Sociedad, 1*, 1-5.

Peña-Sureda, A., Colón-Ortiz, A. y Ramos-Rullán, I. (2021). Aplicación de estrategias heurísticas en la solución de problemas que se modelan mediante ecuaciones algebraicas en estudiantes de una institución educativa. *Revista Caribeña de Investigación Educativa*, *5*(2), 144-158.

Perales, J. (2000). *Resolución de problemas*. Síntesis.

Pérez, E. (2021). *Aplicación del método Polya para la resolución de problemas aditivos en las alumnas del tercer grado "C", Institución Educativa N° 82949 "Belén", Cajamarca* (Tesis de Segunda Especialidad). Universidad Nacional de Cajamarca. Cajamarca -Perú.

Pifarré, M. y Sanuy, J. (2001). La enseñanza de las estrategias de resolución de problemas en la ESO: Un ejemplo concreto. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 19*(2), 297-308.

Poggioli, L. (1999). *Estrategias de resolución de problemas. Serie enseñando a aprender*. Fundación polar.

Polya, G. (1978). *Cómo plantear y resolver problemas*. Limusa.

Pozo, J.I. (1994). *La solución de problemas.* Santillana.

Rodríguez, W. (2011). *Guía de investigación científica*. Universidad de Ciencias y Humanidades.

Ruiz F. (2017). *Las estrategias heurísticas y la resolución de problemas de los estudiantes del tercer año de Secundaria de la I.E. Nº 6094 "Santa Rosa", Chorrillos; Lima, 2016* (Tesis de Maestría). Universidad Cesar Vallejo. Lima –Perú.

Sánchez y Reyes (1998). *Metodología y diseños en la investigación científica.* Mantaro.

Santos, L.M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas* (2a ed.). Iberoamericana.

Santos, L.M. (2014). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos.* Trillas.

Schoenfeld, A. (1989). La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas. En L.B. Resnick y L.E. Klopfer (Comps.). *Currículum y cognición* (pp.141- 170). Aique.

Sigarreta, J.M. y Laborde, J.M. (2004). Estrategias para la resolución de problemas como un recurso para la interacción sociocultural. *Revista Premisa*, 20, 15-18.

Socas, M.M., Camacho, M., Palera, M.M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al algebra.* Síntesis.

Torres, A. (2014). *Estrategias heurísticas para mejorar la capacidad de resolución de problemas en el área de matemática de los estudiantes del cuarto grado "E" de educación secundaria de la institución educativa emblemática "San Carlos" de la ciudad de Bambamarca, provincia de Hualgayoc, región Cajamarca-2013* (Tesis de Maestría). Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo. Lambayeque - Perú.

Valdivia, J.L. (2022). *Estrategia heurística para desarrollar la capacidad resolución de problemas en los estudiantes de formación docente en un Instituto Superior Pedagógico Privado de Lima* (Tesis de Maestría). Universidad San Ignacio de Loyola. Lima - Perú.

Vilanova, S., Rocerau, M., Valdez, G., Oliver, M., Vecino, S., Medina, P., Astiz, M. y Alvarez, E. (s.f.). La educación matemática. El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación*, 1-11.

Zumba, A.S. (2022). *El método heurístico en la resolución de problemas de razonamiento matemático.* (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Ecuador. Ecuador.

Anexo : Captura de reporte Turnitin

ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

INFORME DE ORIGINALIDAD

19%	19%	4%	10%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	repositorio.uct.edu.pe Fuente de Internet	3%
2	hdl.handle.net Fuente de Internet	2%
3	repositorio.ucv.edu.pe Fuente de Internet	1%
4	repositorio.unsaac.edu.pe Fuente de Internet	1%
5	Submitted to Universidad Cesar Vallejo Trabajo del estudiante	1%
6	docplayer.es Fuente de Internet	1%
7	Submitted to Universidad Catolica de Trujillo Trabajo del estudiante	<1%
8	repositorio.usil.edu.pe Fuente de Internet	<1%
9	es.scribd.com Fuente de Internet	